

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Факультет экономических наук
Департамент математики

**Рабочая программа дисциплины
Дифференциальные уравнения и вычислительные методы**

для уровня подготовки – бакалавриат

Разработчик программы

В.А.Гордин, доктор физико-математических наук, vagordin@mail.ru

Одобрена к реализации на заседании комиссии

«__»_____ 2015 г.

Утверждена «__»_____ 2015 г.

Руководитель Методического центра ДООП

«__»_____ 2015 г.

_____ [подпись]

Москва, 2015

Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.



Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов, изучающих дисциплину «**Дифференциальные уравнения и вычислительные методы**».

Программа разработана в соответствии с: Образовательным стандартом Государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Государственный университет – Высшая школа экономики», в отношении которого установлена категория «национальный исследовательский университет».

Цели освоения дисциплины

Одной из основных целей курса является знакомство студентов с обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных – явлениями, которые они описывают, методами вывода таких уравнений, методами их решения и (или) исследования свойств их решений. Другой основной целью курса является формирование и развитие навыков применения вычислительных методов к решению этих уравнений.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные типы дифференциальных уравнений и систем, а также задач (начальных, краевых, смешанных) для них;
- Знать изложенные в курсе модели, базирующиеся на дифференциальных уравнениях и системах;
- Знать изложенные в курсе модели, базирующиеся на разностных уравнениях и системах;
- Знать важнейшие способы разностных аппроксимаций дифференциальных уравнений;
- Иметь навыки численного построения решений задач, связанных с дифференциальными уравнениями.

Студент бакалавриата, успешно освоивший содержание курса, в соответствии с целями основной образовательной программы и задачами профессиональной деятельности, указанными в пп. 3.2 и 3.6.1 ОС ГОБУ ВПО ГУ-ВШЭ, должен обладать следующими компетенциями:

<i>Компетенция</i>	<i>Код по ФГОС/НИУ</i>	<i>Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)</i>	<i>Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции</i>
Общенаучная	ОНК-1	Способность к анализу и синтезу на основе системного подхода	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-2	Способность перейти от проблемной ситуации к проблемам, задачам и лежащим в их основе противоречиям	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-3	Способность использовать методы критического анализа, развития научных теорий, опроверже-	Стандартные (лекционно-семинарские)



		ния и фальсификации, оценить качество исследований в некоторой предметной области	
Общенаучная	ОНК-4	Готовность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при работе в какой-либо предметной области	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-5	Готовность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий аппарат дисциплины	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-6	Способность приобретать новые знания с использованием научной методологии и современных образовательных и информационных технологий	Стандартные (лекционно-семинарские)
Общенаучная	ОНК-7	Способность порождать новые идеи (креативность)	Стандартные (лекционно-семинарские)
Инструментальные	ИК-2	Умение работать на компьютере, навыки использования основных классов прикладного программного обеспечения, работы в компьютерных сетях, составления баз данных	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональные	ПК-1	Способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональные	ПК-2	способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональные	ПК-3	способность в составе научно-исследовательского и производственного коллектива решать задачи профессиональной деятельности в соответствии с профилем подготовки, общаться с экспертами в других предметных областях	Стандартные (лекционно-семинарские)



Профессиональные	ПК-4	способность критически оценивать собственную квалификацию и её востребованность, переосмысливать накопленный практический опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональные	ПК-8	способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая разработку математических моделей, алгоритмических и программных решений	Стандартные (лекционно-семинарские)

Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина является факультативной.

Для освоения учебной дисциплины требуются знания и компетенции, предусмотренные начальными бакалаврскими курсами «Линейная алгебра» или «Линейная алгебра и геометрия» и «Математический анализ» или «Основы высшей математики».

Умение исследовать и решать дифференциальные и разностные уравнения, используя аналитические и численные подходы, будут полезны в различных технических, экономических, финансовых и других приложениях, в зависимости от дальнейшей деятельности студентов.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Численные методы;
- Теория вероятностей;
- Дифференциальные уравнения;
- Функциональный анализ;

Тематический план учебной дисциплины

№	Название темы	Всего часов	В т.ч. лекции	В т.ч. семинары	Самост. работа
1	Простейшие примеры моделей, основанных на дифференциальных уравнениях	10	2	2	6
2	Модели, основанные на обыкновенных дифференциальных и разностных уравнениях	20	5	5	10
3	Дифференциальные уравнения в частных производ-	15	4	4	8



	ных первого порядка				
4	Линейные дифференциальные уравнения в частных производных, параболические и гиперболические	16	4	4	8
5	Преобразование Фурье и нормы в пространствах функций. Понятие корректности задачи	15	4	4	8
6	Задача Штурма – Лиувилля и ее разностные аппроксимации	18	4	4	10
7	Эллиптические краевые задачи и их разностные аппроксимации	18	5	5	8
Итого		114	28	28	58



Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	1 год				Параметры
		1	2	3	4	
Текущий (неделя)	Контрольная работа			1		
Итоговый	Зачет				1	

1.1 Критерии оценки знаний, навыков

При текущем контроле студент должен продемонстрировать знание и понимание пройденного материала, владение навыками решения типовых задач, умение применять известные из лекций схемы теоретических рассуждений.

Это же должен продемонстрировать студент и на итоговом контроле.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

1.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде контрольной работы и решению задачи на компьютере. Итоговый контроль осуществляется в виде зачетной контрольной работы и решения задачи на компьютере с устным обсуждением оных. Итоговая оценка $O_{\text{итог}}$ по 10-балльной шкале формируется как взвешенная сумма $O_{\text{итог}} = 0,4 * O_{\text{к.р.}} + 0,6 * O_{\text{зач.}}$, округленная затем до целого числа баллов. Здесь $O_{\text{к.р.}}$ и $O_{\text{зач.}}$ обозначают оценки по 10-балльной шкале за контрольную работу и зачет соответственно. Способ округления результирующей оценки по учебной дисциплине арифметический.

На зачете студент может получить дополнительный вопрос, ответ на который оценивается в 1 балл.

Содержание дисциплины

Тема I. Простейшие примеры моделей, основанных на дифференциальных уравнениях

Движение материальной точки. Движение твердого тела. Понятия фазового пространства и векторного поля. Истечение воды из сосуда. Предположения модели. Стационарное течение жидкости в круглой трубе. Формула Гагена – Пуазейля. Вывод одномерного уравнения неразрывности. Уравнение с источником. Вывод одномерного уравнения диффузии (теплопроводности). Многомерные уравнения. Оператор Лапласа. Понятие первого интеграла.

Литература: основная: [Горд-10, Горд-16].

Дополнительная [Год-79, Гельф-59, Б]

Тема II. Модели, основанные на обыкновенных дифференциальных и разностных уравнениях

Уравнение Мальтуса и рост банковского вклада. Последовательность Фибоначчи и характе-



ристическое уравнение. Оценка решения при больших временах. Логистическое (Ферхюльста) уравнения, дифференциальное и разностное. Метод Ньютона решения нелинейных уравнений. Модель войн Ланкастера и ее модификации. Модель Лотки – Вольтерра. Динамика размножения раковых клеток. Стационарные точки. Нормы в линейных пространствах. Устойчивость по Ляпунову.

Литература: *основная:* [Горд-16, М, Арн-1],
дополнительная: [Горд-05, Б]

Тема III. Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка

Линейное уравнение с постоянными коэффициентами и решение задачи Коши. Решение смешанной краевой задачи. Системы линейных уравнений в частных производных первого порядка. Условие гиперболичности. Линейное уравнение с переменными коэффициентами и метод характеристик. Квазилинейное уравнение и возможность градиентной катастрофы. Примеры разностной аппроксимации уравнения переноса: схемы Эйлера, leap-frog, Кранка – Николсон.

Литература: *основная:* [Горд-10, Петр-1, Арн-2]
дополнительная: [Гельф-59]

Тема IV. Линейные дифференциальные уравнения в частных производных, параболические и гиперболические

Примеры гиперболических и параболических уравнений. Модель Блэка – Шоулса – Мертона для справедливой цены европейских опционов. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных. Формальное определение символа оператора. Системы уравнений в частных производных. Уравнения акустики. Условия корректности задачи Коши

Литература: *основная:* [Горд-10, Петр-2, Ш];
дополнительная: [Гельф-58].

Тема V. Преобразование Фурье и нормы в пространствах функций. Понятие корректности задачи

Основные свойства преобразования Фурье. Символ оператора. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и его фундаментальное решение. Решение уравнения диффузии на прямой. Пространства Соболева. Корректность задачи Коши. Контрпримеры: пример Адамара и обратная задача для уравнения диффузии. Виды граничных условий.

Литература: *основная:* [Горд-10, Петр-2, Ш];
дополнительная: [Год-79, Гельф-58].

Тема VI. Задача Штурма – Лиувилля и ее разностные аппроксимации

Модели, использующие задачу Штурма – Лиувилля. Формула Грина для решения задачи ШЛ. Разностная аппроксимация задачи ШЛ. Метод прогонки. Компактная разностная схема. Краевая задача для разностных уравнений (игра с постоянной суммой или случайное блуждание на одномерной сетке).

Литература: *основная:* [Горд-10, Горд-16,];
дополнительная: [Горд-05, Год-77, Ш]

Тема VII. Эллиптические краевые задачи и их разностные аппроксимации



Условие эллиптичности на символ оператора. Модели, основанные на эллиптических уравнениях. Типы граничных условий. Разностные аппроксимации эллиптических уравнений. Итерационные методы решения. Задача о случайных блужданиях на многомерной сетке.

Литература: основная: [Горд-10, Ш, Петр-2];

дополнительная: [Год-79, Год-77].

Образовательные технологии

Проводятся стандартные лекционно-семинарские занятия и регулярные консультации с ответами на вопросы студентов. По электронной почте рассылаются дополнительные материалы к занятиям в виде слайдов и текстов в формате pdf.

Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

1.3 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Для оценки качества освоения дисциплины можно использовать задачи из типового варианта зачетной работы, приведенного ниже.

1.4 Примеры заданий промежуточного /итогового контроля

Типовой вариант зачетной контрольной работы

1. Рассмотрим уравнения переноса и диффузии. Являются ли для них устойчивыми явная схема Эйлера и схема leap-frog?
2. Постройте стандартную разностную схему для задачи Штурма – Лиувилля:
 $-u'' + 0.5 \sin^2 x \cdot u = \cos x$ на отрезке $[0, \pi]$ с граничными условиями Дирихле. Оцените порядок сходимости этой разностной схемы. Докажите положительную определенность разностного оператора.
3. Вычислите преобразование Фурье от функций $\exp(-x^2/2)$ и $\chi(x) \cdot \exp(-3x)$, где χ - функция Хевисайда.
4. Определите первые интегралы для системы уравнений акустики.

Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

1.5 Базовые учебники

[Горд-16] Гордин В.А. Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решать. М., Издательский дом ВШЭ. 2016

[Горд-10] Гордин В.А. Математика, компьютер, прогноз погоды и другие задачи математической физики. М., ФИЗМАТЛИТ, 2010 и 2013.

Основная литература

[Ш] Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М., МЦНМО, 2001.



[Арн-1] Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Ижевск: "РХД", 2000 (или любое другое издание).

[Арн-2] Арнольд В.И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнениях, Ижевск: "РХД", 2000 (или любое другое издание).

[М] Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Высшая школа», 1966.

[Петр-1] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., ФИЗМАТЛИТ, 1970 (или любое другое издание).

[Петр-2] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях в частных производных. М., ФИЗМАТЛИТ, 1970.

1.6 Дополнительная литература

[Год-79] Годунов С.К. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1979.

[Год-77] Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. М., «Наука», 1977 (или любое другое издание).

[Горд-05] Гордин В.А. Как это посчитать? М., изд. МЦНМО, 2005.

[Гельф-59] Гельфанд И.М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. Успехи математических наук, 1959, т. 14, № 2, стр.87 – 158.

[Гельф-58] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1958.

[Б] Братусь А.С., Новожилов А.С. Платонов А.П. Динамические системы и модели биологии. М., ФИЗМАТЛИТ, 2010.

1.7 Справочники, словари, энциклопедии не используются

1.8 Программные средства

Выбор программных средств для реализации алгоритмов осуществляется студентом.

В компьютерных классах установлена система Matlab, которая оптимально приспособлена для решения задач данного курса.

1.9 Дистанционная поддержка дисциплины

Предусмотрена электронная переписка со студентами.