

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
"Национальный исследовательский университет  
"Высшая школа экономики"**

Московский институт электроники и математики  
Департамент прикладной математики

**Майнор: Исследование операций в инженерных и социально-  
экономических приложениях**

**Рабочая программа дисциплины  
Компьютерное моделирование и анализ временных рядов**

для образовательной программы подготовки бакалавра

Разработчик(и) программы  
Голубин А.Ю. к.ф.-м.н., доц., agolubin@hse.ru

Одобрена Академическим советом ОП «Прикладная математика»  
«\_\_»\_\_\_\_\_ 2016 г., № протокола\_\_\_\_\_

Утверждена «\_\_»\_\_\_\_\_ 2016 г.  
Руководитель Департамента Прикладной математики  
А.В.Белов \_\_\_\_\_ [подпись]

Москва, 2016

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета  
и другими вузами без разрешения подразделения-разработчика программы.*



## 1 Область применения и нормативные ссылки

Компьютерное моделирование является одним из важнейших инструментов исследования сложных систем, особенно в тех случаях, когда применение аналитических методов невозможно, а реальные эксперименты затруднены из-за финансовых или физических препятствий. Компьютерное моделирование заключается в проведении серии вычислительных экспериментов, целью которых является сбор данных, их статистический анализ, интерпретация и сопоставление результатов моделирования с реальным поведением изучаемого процесса или объекта. Кроме того, компьютерное моделирование дает возможность исследовать отклик моделируемой реальной системы на изменения ее параметров и начальных условий, т.е. на управление.

В курсе будут изучаться основные методы моделирования реализаций случайных величин и векторов, принципы построения алгоритмов имитации траекторий случайных процессов. В части анализа временных рядов будут изучены как методы построения моделей по заданному массиву наблюдений (модели авторегрессии и скользящего среднего, смешанные модели), так и методы прогнозирования дальнейшего поведения временных рядов. Студенты научатся формализовать задачи имитации траекторий случайных процессов и анализировать результаты моделирования, а также строить оценки параметров и вероятностных характеристик исследуемых процессов с помощью статистических методов.

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности. Программа разработана в соответствии с:

- Образовательным стандартом по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика (квалификация бакалавр).
- Образовательной программой «Прикладная математика».
- Рабочим учебным планом университета по направлению подготовки 01.03.04 Прикладная математика на 2016/17 уч.год.

## 2 Цели освоения дисциплины

Данная дисциплина имеет своей целью:

- обучить студентов теории и практическим методам имитационного моделирования процессов стохастической природы, когда применение аналитических методов невозможно, а реальные эксперименты затруднены из-за финансовых или физических препятствий. Компьютерное моделирование заключается в проведении серии вычислительных экспериментов, целью которых является сбор данных, их статистический анализ, интерпретация и сопоставление результатов моделирования с реальным поведением изучаемого процесса.
- сформировать представление, первичные знания, умения и навыки студентов по основам моделирования случайных величин и процессов стохастической природы, достаточные для дальнейшего продолжения образования и самообразования их в области приложений теории вероятностей и смежных с ней областях.
- выработать практические навыки выбора метода решения и составления алгоритмов для решения прикладных задач.

Задачи дисциплины — дать основы:



- теории имитационного моделирования применительно к экономическим и техническим процессам;
- моделирования реализаций случайных величин и случайных процессов;
- алгоритмического описания моделирования систем массового обслуживания и динамики финансовых потоков.
- анализа и прогноза временных рядов

### 3 Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате изучения дисциплины студент должен:  
иметь представление

- о принципах построения имитационных моделей сложных стохастических систем и моделей стационарных временных рядов;

знать:

- основные методы моделирования реализаций случайных величин и векторов;
- основные типы систем массового обслуживания и процессов риска;
- принципы построения алгоритмов имитации траекторий соответствующих случайных процессов;

уметь:

- формализовывать задачи имитации траекторий случайных процессов;
- применять алгоритмы моделирования основных типов случайных процессов, анализировать результаты моделирования, строить оценки вероятностных характеристик исследуемых систем;

иметь навыки:

- разработки и программной реализации численных алгоритмов имитационного моделирования;
- использования стандартных методов построения траекторий различных типов временных рядов.

Компетенция	од по ОС ВШЭ	уровень формирования компетенции	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
Способен учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от профессиональной	УК-1	МЦ	Дает определения новым понятиям	Формируется на протяжении всего учебного процесса	Текущий контроль на протяжении модуля
Способен выявлять науч-	УК-	СД	Распознает модели, адекватные изучаемым ре-	Формируется на протяжении всего	Текущий контроль



Компетенция	код по ОС ВШЭ	уровень формирования компетенции	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
нующую сущность проблем в профессиональной области.	2		альным процессам	учебного процесса	на протяжении модуля
Способен решать проблемы в профессиональной деятельности на основе анализа и синтеза	УК-3	СД	Анализирует модели	Формируется на протяжении всего учебного процесса	Текущий контроль на протяжении модуля, экзамен
Способен сформулировать инженерную задачу, формализовав ее на основе знаний математического аппарата и проведенного системного анализа	ПК-2	РБ	представляет связи между фундаментальными и прикладными науками	Формируется на протяжении всего учебного процесса	Текущий контроль на протяжении модуля
Способен анализировать разрабатываемые технические решения на основе их интерпретации и оценки возможных вариантов.	ПК-3	СД	Воспроизводит и, использует известные методы решения задач	Формируется на протяжении всего учебного процесса	Текущий контроль на протяжении модуля
Способен определять экономическую целесообразность принимаемых технических и организационных решениях	ПК-6	РБ/СД	Владеет и применяет методы оценки эффективности проекта	Формируется в процессе выполнения работы над книгами по специальности	Промежуточный контроль и итоговый экзамен
Способность использовать и развивать	ПК-11	РБ/СД	Владеет методами математического моделирования и применяет их для	Формируется в процессе выполнения домашних работ	Промежуточный контроль



Компетенция	од по ОС ВШЭ	У уровень формирования компетенции	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции	Форма контроля уровня сформированности компетенции
методы математического моделирования, применять и использовать аналитические и научные пакеты прикладных программ			решения конкретных задач		
Способен работать с различными источниками информации, способен фильтровать и сужать массив знаний под задачу	ПК-16	РБ/МЦ	Анализирует информацию, релевантную к поставленной задаче	Формируется в процессе выполнения работы над лекциями и практическими занятиями	Текущий контроль и итоговый экзамен

#### 4 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина является дисциплиной специализации «Прикладные методы стохастического анализа».

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах:

- математический анализ
- теория вероятностей и математическая статистика
- алгоритмические языки и программирование

#### 5 Тематический план учебной дисциплины

	Название раздела	Всего	Лекции	Семинары	Практ. зан.	Самостоятельная работа



	Этапы имитационного моделирования. Способы моделирования случайных величин. [1]	16	2		4	10
	Общий метод моделирования дискретной случайной величины, примеры. Специальные методы моделирования. Метод обратных функций как общий метод моделирования произвольной случайной величины. Применение метода обратных функций для экспоненциального и кусочно-линейного распределений. [1,3]	24	4		8	12
	Моделирование равномерного распределения в заданной области. Алгоритмы моделирования равномерного распределения в прямоугольнике и круге. Метод исключения. Метод суперпозиции. [1,3]	19	4		3	12
	Моделирование гамма-распределения, распределения с кусочно-линейной плотностью. [1]	11	0		3	8
	Моделирование нормального распределения. Общий метод моделирования случайных векторов. Моделирование многомерного нормального распределения. Вычисление оценки математического ожидания с.в. Вычисление интегралов методом Монте-Карло. Точность метода. [1-3]	32	8		4	20
	Система массового обслуживания $G G n m$ . Оценка стандартных нестационарных и стационарных характеристик. Системы $G G n 0$ , $G G n m$ , $G G n \infty$ : построение алгоритмов моделирования траекторий. [3]	32	6		6	20



	Процессы риска, моделирование основных типов процессов риска. Оценивание вероятности разорения на конечном и бесконечном интервале. [3]	28	6		6	16
	Модели авторегрессии и скользящего среднего, обобщенные модели, методы прогнозирования временных рядов.	28	6		6	16
	Всего	190	36		40	114

## 6 Формы контроля знаний студентов

Тип контроля	Форма контроля	3-ой год обучения				Параметры
		1	2	3	4	
Текущий (неделя)	Самостоятельная работа					
	Контр. раб.					
	Домашнее задание				2	
Итоговый				*	Устный экзамен	

### 6.1 Критерии оценки знаний, навыков

При оценке результатов выполнения контрольной работы и домашних заданий применяется дифференцированный подход по десятибалльной системе в соответствии со знаниями и навыками, проявленными студентом во время их выполнения. Темой работ являются моделирование случайных величин с заданными распределениями и задачи оценки показателей систем массового обслуживания. Задание выдается индивидуально каждому студенту или бригаде из двух студентов и заключается в математическом исследовании моделей. Итогом является письменный отчет. Домашняя работа преследует две основные цели. Первая – проявить умение пользоваться теоретическими сведениями математической теории для решения практической задачи. Вторая – проявить навык в письменной форме грамотно излагать результаты работы, уделяя внимание стилю изложения и соблюдая математическую строгость при обосновании решения задачи. Зачет домашней работы осуществляется по результатам собеседования на основании представленного отчета.

Сдача студентом экзамена оценивается по десятибалльной и пятибалльной системе в соответствии со знаниями и навыками, проявленными студентом на экзамене.



## 7 Содержание дисциплины

**Р а з д е л 1.** Моделирование случайных величин и векторов.

Основные принципы и этапы имитационного моделирования. Типы генераторов случайных чисел. Моделирование дискретных случайных величин (с.в.). Общие методы получения реализаций с.в., моделирование специальных распределений. Моделирование случайных векторов. Вычисление интегралов методом Монте-Карло, оценка точности приближения.

**Р а з д е л 2.** Моделирование случайных процессов.

Классификация методов моделирования и оценок характеристик случайных процессов. Оценивание стационарных и нестационарных характеристик.

**Р а з д е л 3.** Приложения в теории массового обслуживания и теории случайных процессов. Система массового обслуживания  $G|G|n|m$ , моделирование траекторий, оценивание стационарных и нестационарных характеристик. Модели процессов риска.

**Р а з д е л 4.** Модели авторегрессии и скользящего среднего, обобщенные модели, экспоненциальное сглаживание, методы прогнозирования временных рядов.

## 8 Образовательные технологии

В начале курса целесообразно напомнить студентам основные понятия теории вероятностей, ввести необходимые термины из массового обслуживания (типы случайных величин, функции распределения, символика Кендалла, процесс риска); на практических занятиях рекомендуется привести решения типовых задач по вычислению стоимостных характеристик случайных процессов. В учебном процессе, помимо чтения лекций, используются интерактивные формы (обсуждение отдельных разделов дисциплины, защита самостоятельных и домашних работ). В сочетании с внеаудиторной работой это способствует формированию и развитию профессиональных навыков обучения. Для закрепления и проверки знаний студентов по наиболее важным разделам курса проводятся домашние работы, по результатам которых происходит проверка самостоятельной работы студентов.

Для обеспечения интерактивного и непрерывного учебного процесса используются коммуникационные средства, предоставляемые сетью «Интернет», в частности, студентам обеспечивается доступ к современной научной литературе в рамках изучаемого курса, осуществляется информационный обмен посредством электронной почты и LMS. Важной частью работы студентов является подготовка самостоятельных работ с последующей проверкой полученных результатов.

С целью текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации предусмотрена защита домашних работ, которые выполняются небольшим коллективом студентов (два человека). Предусмотрены методические указания к выполнению этой работы (см. Приложение 1).

Формирование оценки за домашние работы:

Оценка по десятибалльной системе учитывает:

- Насколько глубоко и точно студент разобрался в формулировке задания;
- Степень и полноту усвоенных навыков работы со стандартными задачами моделирования случайных величин и процессов.
- Насколько слушатель правильно и аргументировано ответил на вопросы, включая смежные разделы курса, при обсуждении выполненного задания.





## 9 Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

### 9.1 Тематика заданий текущего контроля

Примерные вопросы: постройте подробную блок-схему моделирования а) случайной величины с нормальным распределением, если заданы первые два момента; б) случайного нормального вектора размерности  $n$  с заданным вектором средних и матрицей ковариаций.

### 9.2. Примерная тематика вариантов домашних заданий

#### Домашнее задание № 1

1. Разработать и реализовать алгоритм моделирования случайной величины с заданной кусочно-линейной плотностью.
2. Применение метода исключения к моделированию случайной величины с заданным распределением.
3. Решить задачу моделирования равномерного вектора в заданной области а) на плоскости, б) в пространстве.

#### Домашнее задание № 2

Постройте блок-схему моделирования и программную реализацию алгоритма оценки среднего числа потерянных требований на заданном временном интервале для СМО  $G|G|n|0$  с заданными распределениями интервалов обслуживания и интервалов входного потока требований (см. Приложение 1).

### 9.3. Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

#### Вопросник на экзамен

1. Сложные стохастические системы как объект имитационного моделирования.
2. Способы моделирования случайных величин.
3. Общий метод моделирования дискретной случайной величины.
4. Специальные методы моделирования дискретных величин.
5. Метод обратных функций как общий метод моделирования произвольной случайной величины. Пример.
6. Моделирование равномерных случайных величин в заданной области.
7. Метод исключения.
8. Метод суперпозиции.
9. Моделирование нормального распределения.
10. Моделирование многомерного нормального распределения.
11. Вычисление оценки математического ожидания с.в. Точность метода.
12. Вычисление интегралов методом Монте-Карло.
13. Классификация методов моделирования случайных процессов.
14. Оценивание нестационарных характеристик (NS-характеристик) для случайных процессов. Пример.
15. Оценивание стационарных характеристик (S-характеристик). Пример.
16. Алгоритм моделирования системы массового обслуживания.  $G|G|n|0$ . Пример расчета NS-характеристики.
17. Система массового обслуживания  $G|G|n|m$ . Оценивание NS-характеристик. Пример.



18. Оценивание S-характеристик системы  $G|G|n|m$ . Пример.
19. Модель процесса риска. Оценивание вероятности разорения на конечном интервале.
20. Оценивание вероятности разорения на бесконечном временном интервале.
21. Модель скользящего среднего.
22. Модель авторегрессии.
23. Методы прогнозирования временных рядов.

## 10 Порядок формирования оценок по дисциплине

Преподаватель оценивает работу студентов на практических занятиях, принимая во внимание активность студентов, участие в дискуссиях, правильность решения задач. Накопленная оценка по 10-ти балльной шкале за работу на занятиях определяется перед промежуточным контролем -  $O_{\text{ауд}}$ .

Преподаватель оценивает самостоятельную работу студентов: правильность выполнения домашних работ, полнота и корректность вспомогательных результатов. Накопленная оценка по 10-ти балльной шкале за самостоятельную работу определяется перед итоговым контролем –  $O_{\text{сам. работа}}$ .

Накопленная оценка учитывает результаты студента по текущему контролю следующим образом:

$$O_{\text{накопленная}} = 0.5 O_{\text{ауд}} + 0.5 O_{\text{сам. работа}}$$

Способ округления накопленной оценки промежуточного (итогового) контроля в форме экзамена: в пользу студента.

Итоговая оценка на экзаменах выставляется по 10-балльной шкале (с переводом в 5-ти балльную шкалу) и формируется как среднее арифметическое значение из накопленной оценки и оценки на экзамене.

Перевод в 5-балльную шкалу осуществляется по правилу:

- 0 - 3 б - неудовлетворительно,
- 4 - 5 б - удовлетворительно,
- 6 - 7 б - хорошо,
- 8 - 10 б - отлично.

## 11 Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### 11.1 Основная литература

1. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. М.: Физматлит, 2005.
2. Метьюс Д.Г., Финк К.Д. Численные методы. Использование MATLAB. Издательский дом «Вильямс», 2001.
3. А.П. Михайлов, А.А. Самарский. Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2005.
4. В.П. Носко. Эконометрика. М.: Издательский дом «Дело», 2011.



## 11.2 Дополнительная литература

1. Карпов Ю.Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5. [БХВ-Петербург](#), 2009.
1. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973.
2. Полляк Ю.Г. Вероятностное моделирование на ЭВМ. М.: Сов. радио, 1971.
3. Нейлор Т. и др. Машинные имитационные эксперименты с моделями экономических систем. М.: Мир, 1975.

## информационно-справочные и поисковые системы

[wbooks.ifolder.ru](#), [depositfiles.ru](#), [letitbib.net](#).

## 11.3 Программные средства

ПК с ОС Windows NT/XP, установленный Microsoft Office, транслятор для Visual Basic либо Basic, система Statistica.

## 12 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для успешного освоения дисциплины необходимо следующее материально-техническое обеспечение:

1. Учебный класс, оборудованный современными информационными средствами (минимум – удобной доской).
2. При отсутствии у кого-либо из студентов ПК, необходим класс с персональными компьютерами.

## Приложение 1

### МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ по выполнению домашних работ на тему

#### **Моделирование систем массового обслуживания**

1. Цель работы, ее краткое содержание.

Цель работы состоит в приобретении студентами навыков использования имитационного моделирования сложных экономических систем стохастической природы, описываемых системами массового обслуживания (СМО). Выполнение работы предполагает создание алгоритма расчета заданного показателя (стационарного или нестационарного типа) функционирования СМО и численную реализацию алгоритма с использованием компьютера.

2. Теоретические сведения.

Сколько-нибудь сложные СМО (в особенности, это относится к немарковским моделям) не поддаются расчету аналитическими методами. Одним из наиболее



удачных методов исследования таких моделей является метод имитационного моделирования, состоящий в создании программного комплекса, адекватно имитирующего — с точки зрения получения требуемых характеристик — работу исходной системы, и затем получения траекторий эволюции системы с одновременной статистической обработкой данных численного эксперимента. Получение оценок требуемых характеристик завершает имитационное моделирование системы.

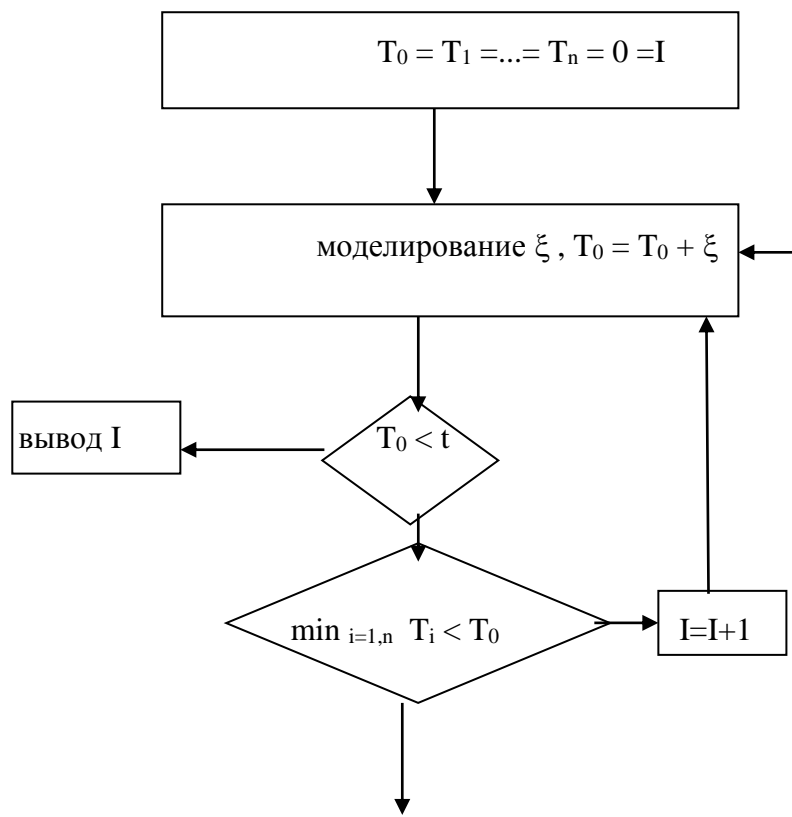
В данной работе рассматриваются системы вида  $GI|G|n|m$  — с рекуррентным потоком заявок на входе,  $n$  различными каналами обслуживания и конечной или бесконечной ( $m=\infty$ ) очередью. Типичными характеристиками такой СМО являются

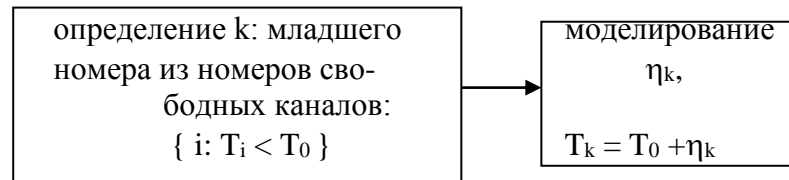
- стационарные: вероятность потери требования, средняя длина стационарной очереди, а также стационарные характеристики типа среднего удельного дохода (в предположении существования стационарного режима работы);

- нестационарные: на интервале  $[0, t]$  определяются вероятность потери хотя бы одного требования, среднее число потерянных требований, средняя максимальная длина очереди, среднее число требований обслуженных различными каналами, а также стоимостные характеристики типа среднего суммарного дохода.

Рассмотрим пример моделирования системы  $GI|G|n|0$ , считая, что интервал между моментами прихода соседних требований распределен по заданному закону  $A(x)$ , т.е.,  $P\{\xi < x\} = A(x)$ , а время  $\eta_i$  обслуживания на  $i$ -том канале имеет закон распределения  $B_i(x)$ ,  $i=1, n$ . Требуется оценить  $J$  -- среднее число потерянных требований на интервале  $[0, t]$ . При этом оценка должна удовлетворять заданной точности  $\varepsilon$  при уровне доверия  $\beta$ .

В ячейке памяти  $T_0$  будем хранить момент прихода очередного требования, в ячейке  $T_i$  - момент окончания обслуживания последнего требования, попавшего на  $i$ -ый канал,  $i=1, n$ . Переменная  $I$  будет содержать текущее значение числа уже потерянных требований. Алгоритм получения одной траектории функционирования СМО на  $[0, t]$ , вычисляющий число потерянных требований для этой траектории имеет вид





Замечание 1. В процессе моделирования приходится многократно получать реализации независимых с.в. с заданными законами распределения (A(x), B(x)). такая задача решается путем последовательного обращения к датчику псевдо-случайных чисел с равномерным распределением и преобразования полученных значений в соответствии с выработанным методом моделирования данной с.в. Выбор подходящего метода моделирования - это отдельная задача для самостоятельного решения.

Замечание 2. Приведенный алгоритм не полностью воспроизводит траекторию функционирования СМО на [0, t]: участок [τ<sub>k</sub>, t], где τ<sub>k</sub> - момент последнего перед t прихода требования, игнорируется. Но с точки зрения вычисления I -- числа потерянных на [0, t] требований -- такое моделирование адекватно исходной СМО, и нет нужды строить более сложный, детальный алгоритм.

Искомая оценка для J будет строиться на основе полученных независимых реализаций I<sub>1</sub>, ..., I<sub>N</sub>. Для построения N независимых траекторий и, следовательно, получения реализаций I<sub>1</sub>, ..., I<sub>N</sub> приведенный алгоритм запускается N раз, но для того, чтобы не допустить "сбрасывания" датчика псевдо-случайных чисел, работающего по рекуррентной формуле, и, т.о., не получить одинаковых траекторий, необходимо иметь главную процедуру, которая бы, не покидая оперативной памяти, вызывала подпрограмму, реализующую алгоритм.

В качестве оценки J выбирается  $J(N) = \sum_{i=1}^N I_j / N$  -- несмещенная, состоятельная оценка математического ожидания числа потерянных требований J.

Оценка точности моделирования. Для определения N<sub>min</sub> -- минимального числа реализаций, гарантирующего заданную точность при выбранном уровне доверия:  $P\{|J(N_{min}) - J| < \epsilon\} \geq \beta$  -- применяется метод основанный на использовании центральной предельной теоремы, условия которой предполагаются выполненными. Согласно этой теореме, при больших N выполнено

$$P\{|\sum_{i=1}^N (I_j - J) / \sqrt{NDI}| < x\} \approx \Phi_0(x),$$

где Φ<sub>0</sub>(x) - функция Лапласа. Тогда, обозначая через x<sub>β</sub> корень уравнения Φ<sub>0</sub>(x) = β, получим

$$P\{|J(N) - J| < x_{\beta} \sqrt{NDI}\} \approx \beta \text{ и } N_{min} = x_{\beta}^2 DI / \epsilon^2. \quad (1)$$

Поскольку дисперсия DI обычно неизвестна а priori, то вместо нее используют выборочную дисперсию  $D(N) = N^{-1}(\sum_{i=1}^N I_j^2) - J^2(N)$ , вычисляя ее параллельно с



получением новых реализаций  $I_j$ . Обычно для  $N_1 \approx 20-50$  вычисляют  $D(N_1)$ , определяют, согласно (1), сколько нужно дополнительных реализаций  $N_2 - N_1$ , чтобы достичь требуемой точности, если считать  $DI$  равной  $D(N_1)$ . Затем вычисляют  $D(N_2)$  и процесс повторяется. Итерации останавливаются, если для вычисленного текущего значения  $N_k$  выполнено:

$$N_k \geq x\beta^2 D(N_k) / \varepsilon^2.$$

### 3. Оборудование.

Данная лабораторная работа рассчитана на выполнение на ПК, оборудованных трансляторами с языков типа Visual Basic, либо Basic, либо Си – в соответствии с желанием и возможностями программировать самого студента.

### 4. Сроки выполнения.

Задания на домашние работы выдаются, соответственно, после изучения студентами разделов "Моделирование случайных величин" и "Моделирование случайных процессов" – в части постановок задач и описания общих типов методов моделирования. Сроки сдачи первой и второй домашних работ: середина и конец 4-го модуля соответственно.