

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"**

Факультет экономических наук

Департамент математики

**Рабочая программа дисциплины
Линейная алгебра в приложениях**

для уровня подготовки - магистратура

Разработчики программы:

Д.И. Пионтковский, доктор физико-математических наук, dpiontkovski@hse.ru

В.Л. Чернышев, кандидат физико-математических наук, vchernyshev@hse.ru

Одобрена на заседании комиссии

«__»_____ 2017 г.

Утверждена «__»_____ 2017 г.

Руководитель Методического центра ДООП

«__»_____ 2017 г.

Москва, 2017

*Настоящая программа не может быть использована другими подразделениями университета
и другими вузами без разрешения кафедры-разработчика программы.*



1. Область применения и нормативные ссылки

Настоящая программа учебной дисциплины устанавливает минимальные требования к знаниям и умениям студента и определяет содержание и виды учебных занятий и отчетности.

Программа предназначена для преподавателей, ведущих данную дисциплину, учебных ассистентов и студентов, изучающих дисциплину «**Линейная алгебра в приложениях**».

Программа разработана в соответствии с: образовательным стандартом Государственного образовательного бюджетного учреждения высшего профессионального образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», в отношении которого установлена категория «национальный исследовательский университет».

2. Цели освоения дисциплины

Линейная алгебра является одной из базовых математических дисциплин. Несмотря на её фундаментальный характер, у нее есть достаточно много «прямых», но вполне эффективных приложений. Наш курс посвящен знакомству магистрантов с такими приложениями и методами, которые, при всей своей элементарности, обычно находятся за пределами стандартных курсов бакалавриата.

Этот курс может быть полезен и студентам уже специализировавшимся в изучении прикладной математики, так и студентам факультетов социальных и экономических наук, желающим лучше понять и глубже освоить методы линейной алгебры, применяющиеся при анализе данных.

3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные утверждения и теоремы курса;
- Уметь решать задачи линейной алгебры, перечисленные в программе курса;
- Иметь навыки построения приближений, аппроксимаций и приближенного решения линейных систем.

Студент магистратуры, успешно освоивший содержание курса, в соответствии с целями основной образовательной программы и задачами профессиональной деятельности, указанными в пп. 3.2 и 3.6.1 ОС ФГАОУ ВПО НИУ ВШЭ, должен обладать следующими компетенциями:

| <i>Компетенция</i> | <i>Код по ФГОС/ НИУ</i> | <i>Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)</i> | <i>Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции</i> |
|--------------------|-------------------------|---|--|
| Общенаучная | ОНК-1 | Способность к анализу и синтезу на основе системного подхода | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-2 | Способность перейти от проблемной ситуации к проблемам, задачам и лежащим в их основе противоречиям | Стандартные (лекционно-семинарские) |



| | | | |
|------------------|-------|---|-------------------------------------|
| Общенаучная | ОНК-3 | Способность использовать методы критического анализа, развития научных теорий, опровержения и фальсификации, оценить качество исследований в некоторой предметной области | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-4 | Готовность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования при работе в какой-либо предметной области | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-5 | Готовность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь их для решения соответствующий аппарат дисциплины | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-6 | Способность приобретать новые знания с использованием научной методологии и современных образовательных и информационных технологий | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Общенаучная | ОНК-7 | Способность порождать новые идеи (креативность) | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Инструментальные | ИК-2 | Умение работать на компьютере, навыки использования основных классов прикладного программного обеспечения, работы в компьютерных сетях, составления баз данных | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-1 | Способность демонстрации общенаучных базовых знаний естественных наук, математики и информатики, понимание основных фактов, концепций, принципов теорий, связанных с прикладной математикой и информатикой | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-2 | способность понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический | Стандартные (лекционно-семинарские) |



| | | | |
|------------------|------|---|-------------------------------------|
| | | аппарат | |
| Профессиональные | ПК-3 | способность в составе научно-исследовательского и производственного коллектива решать задачи профессиональной деятельности в соответствии с профилем подготовки, общаться с экспертами в других предметных областях | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-4 | способность критически оценивать собственную квалификацию и её востребованность, переосмысливать накопленный практический опыт, изменять при необходимости вид и характер своей профессиональной деятельности | Стандартные (лекционно-семинарские) |
| Профессиональные | ПК-8 | способность решать задачи производственной и технологической деятельности на профессиональном уровне, включая разработку математических моделей, алгоритмических и программных решений | Стандартные (лекционно-семинарские) |

4. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Настоящая дисциплина является факультативной.

Для освоения учебной дисциплины требуются знания и компетенции, предусмотренные любым из начальных бакалаврских курсов «Линейная алгебра», «Алгебра», «Линейная алгебра и геометрия» или «Основы высшей математики».

Основные положения дисциплины могут быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Численные методы линейной алгебры;
- Функциональный анализ;
- Анализ данных;
- Машинное обучение.

5. Тематический план учебной дисциплины

| № | Название темы | Всего часов | В т.ч. лекции | В т.ч. семинары | Самост. работа |
|---|---------------|-------------|---------------|-----------------|----------------|
|---|---------------|-------------|---------------|-----------------|----------------|



Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Программа дисциплины «Линейная алгебра в приложениях»
для подготовки магистра

| | | | | | |
|--------------|---|------------|-----------|-----------|-----------|
| 1 | Псевдообратная матрица и метод наименьших квадратов | 18 | 6 | 6 | 6 |
| 2 | Матричные разложения. | 16 | 4 | 4 | 4 |
| 3 | Метрики и нормы. Матричные нормы. | 18 | 6 | 6 | 6 |
| 4 | Элементы теории возмущений | 16 | 6 | 6 | 4 |
| 5 | Линейная алгебра и задачи оптимизации | 14 | 4 | 4 | 12 |
| 6 | Линейные коды | 20 | 4 | 4 | 4 |
| 7 | Параллельные вычисления в линейной алгебре. | 12 | 6 | 6 | 6 |
| Итого | | 114 | 36 | 36 | 42 |



Формы контроля знаний студентов

| Тип контроля | Форма контроля | 1 год | | | | Параметры |
|------------------|--------------------|-------|---|---|---|-----------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| Текущий (неделя) | Контрольная работа | | | 1 | | |
| Итоговый | Зачет | | | | 1 | |

5.1 Критерии оценки знаний, навыков

При текущем контроле студент должен продемонстрировать знание и понимание пройденного материала, владение навыками решения типовых задач, умение применять известные из лекций схемы теоретических рассуждений.

Это же должен продемонстрировать студент и на итоговом контроле.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

5.2 Порядок формирования оценок по дисциплине

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде контрольной работы. Итоговый контроль осуществляется в виде зачетной контрольной работы. Итоговая оценка $O_{\text{ИТОГ}}$ по 10-балльной шкале формируется как взвешенная сумма $O_{\text{ИТОГ}} = 0,5 * O_{\text{к.р.}} + 0,5 * O_{\text{зач}}$, округленная до целого числа баллов. $O_{\text{к.р.}}$ и $O_{\text{зач}}$ обозначают оценки по 10-балльной шкале за контрольную работу и зачет соответственно. Способ округления результирующей оценки по учебной дисциплине арифметический.

Кроме того, предусмотрена возможность автоматического получения студентом зачета. Для его получения студент должен написать промежуточную контрольную не ниже чем на оценку 8 и самостоятельно проработать и сделать доклад по одной из тем, помеченных звездочкой в программе курса. Оценка за доклад при этом учитывается как $O_{\text{зач}}$ в приведенной выше формуле.

На пересдаче студенту предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

На зачете студент может получить дополнительный вопрос (дополнительную практическую задачу, решить к пересдаче домашнее задание), ответ на который оценивается в 1 балл.

6. Содержание дисциплины

Тема I. Псевдообратная матрица и метод наименьших квадратов

Псевдообратная матрица, ее определения, основные свойства и способы вычисления.

Основы метода наименьших квадратов, решение линейной задачи на метод наименьших квадратов



с помощью псевдообратной матрицы. Понятие о линейной регрессии, примеры решения практических задач.

Литература: *основная:* [Б], глава IV; [Ш], глава 8;
дополнительная: [АЕР], Appendix D

Тема II. Матричные разложения.

Матричные разложения и их приложения к обработке изображений и к машинному обучению. QR разложение и сингулярное (SVD) разложение.

Литература: [Ш], глава 8.
дополнительная: [W]

Тема III. Метрики и нормы. Матричные нормы.

Метрики в нормированных пространствах. Матричные нормы, их связь с векторными нормами. Нормы Гельдера и Фробениуса. Спектральный радиус, связь с нормами.

Литература: *основная:* [КФ], с.48-66, [Б], с.67-86;
дополнительная: [P], с.493-103; [АЛ], с.91-105, [Го].

Тема IV. Элементы теории возмущений.

Оценки собственных значений, теоремы Гершгорина. Число обусловленности матрицы. Связь с обусловленностью систем линейных уравнений. Примеры приближенного решения систем линейных уравнений.

*Методы решения больших систем линейных уравнений: обзор и примеры.
Литература: *основная:* [Б], с.235-258;
дополнительная: [АЛ], с.125-128; [Ш], глава 8; [Го].

Тема V. Линейная алгебра и задачи оптимизации

Задача линейного программирования. Примеры. Связь прямой и двойственной задачи.

*Методы решения задачи линейного программирования, симплекс-метод.

Итерационные методы решения систем линейных уравнений. Их связь с задачей поиска в интернете.

*Численные методы решения минимизации среднеквадратичного отклонения с линейными ограничениями.

*Задача квадратичного программирования и алгоритмы ее решения.

*Задача выпуклого программирования и методы ее решения.

Литература: *основная:* [Б], глава V
дополнительная: [Ш], глава 10; [Н]

Тема VI. Линейные коды.

Линейные коды и коды, исправляющие ошибки.



Литература: дополнительная: [С], глава 4.

Тема VII. Параллельные вычисления в линейной алгебре.

Эффективные алгоритмы и параллельные вычисления в линейной алгебре.

Литература: дополнительная: [ГО], [О].

7. Образовательные технологии

Проводятся стандартные лекционно-семинарские занятия и регулярные консультации с ответами на вопросы студентов.

8. Оценочные средства для текущего контроля и аттестации студента

8.1 Вопросы для оценки качества освоения дисциплины

Для оценки качества освоения дисциплины можно использовать задачи из типового варианта зачетной работы, приведенного ниже.

8.2 Примеры заданий промежуточного /итогового контроля

Типовой вариант контрольной работы

1. Воспользовавшись формулой Лагранжа, запишите многочлен степени не выше третьей, для которого $f(-4) = -53, f(-2) = -9, f(2) = 31, f(1) = 12$.

2. Найдите какое-нибудь разложение полного ранга и псевдообратную матрицу для

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & -7 \\ 12 & 9 & 0 \\ -6 & -3 & 5 \\ 16 & 12 & -14 \end{pmatrix}.$$

3. Среди всех приближений решения следующей системы по методу наименьших квадратов

найдите вектор наименьшей длины.
$$\begin{cases} -3y - 3z = 0 \\ 8x + 5y - z - 4t = 5 \\ -3x - 3y + z + t = -1 \\ 16x + 4y - 8z - 4t = 11 \end{cases}$$

4. Для многочлена $x^3 - 2x^2 + x + 1$ найдите наилучшее равномерное приближение многочленом второй степени на отрезке $[1, 3]$.

5. Для функции $\cos(x) + x^2 + x + 1$ найдите приближение многочленом степени не выше второй, наилучшее относительно нормы, заданной скалярным произведением

$$\langle g(x), f(x) \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x)f(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

6. Найдите сингулярное разложение для матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



7. Найдите значение $f(A)$ функции $f(l) = \ln(l+2)$, где $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Постройте такую матричную норму на пространстве матриц второго порядка, что последовательность A^n норм матриц сходится, где $\begin{pmatrix} -0.85 & -1 \\ 0 & 0.85 \end{pmatrix}$ или докажите, что такой нормы не существует.

9. При каком q уравнение $18x^2 + 24xz + 4y^2q^2 - 16y^2 + 9qy^2 + 12yqz + 4qz^2 + 8z^2 = 1$ задает единичную окружность относительно какой-то нормы? Найдите норму вектора $(1,1,1)$ в зависимости от q .

10. Решить приближенно систему и оценить погрешности решения в нормах

$|\cdot|_1, |\cdot|_2, |\cdot|_\infty$:

$$\begin{cases} 2(1 + \varepsilon_1)x + (3 + \varepsilon_2)y = 5 + \varepsilon_3 \\ -3x + (2 + \varepsilon_1)y = -1 + \varepsilon_4 \end{cases}$$

где неизвестные числа ε_j удовлетворяют условиям $|\varepsilon_j| < 0.05$ для всех $j = 1, \dots, 4$.

11. Существуют ли несимметричные матрицы, для которых $\kappa_2(A^2) = (\kappa_2(A))^2$?

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

9.1 Базовый учебник

[Б] Беклемишев Д.В., Дополнительные главы линейной алгебры, СПб, изд. Лань, 2008

[Ш] Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2003. 576 с.

9.2 Основная литература

[В] Винберг Э.Б., Курс алгебры, М., изд. МГУ, 2002 (и последующие издания)

[БЖК] Бахвалов Н., Жидков Н., Кобельков Н., Численные методы, М., изд. Бином, 2003.

[КФ] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, М., изд. Наука, 1976.

9.3 Дополнительная литература

[АЕР] Aleskerov F., Ersel H., Piontkovski D., *Linear Algebra for Economists*. Berlin—Heidelberg, Springer, 2011

[АЛ] Артамонов В.А., Латышев В.Н., Линейная алгебра и выпуклая геометрия, М., изд. Факториал, 2004.

[Г] Гордин В.А., Как это посчитать? М., изд. МЦНМО, 2005.

[Д] Данилов А.Ю., Многочлены Чебышева, М., 2003.

10. [Н] Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М., МЦНМО, 2010

[Р] Рудин У., Курс математического анализа, М., Мир, 1976.

[Га] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Физматлит, 2004



[Го] Годунов С. К. Лекции по современным аспектам линейной алгебры. — Новосибирск: Научная книга (ИДМИ), 2002.—216 с.

[О] Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем.-М., "Мир", 1991.

[С] Сагалович, Ю. Л. Введение в алгебраические коды : учебное пособие для вузов. Издательство: ИППИ РАН, 2010 г.

10.1 Справочники, словари, энциклопедии

[W] Wolfram Demonstrations Project, Image Compression via the Singular Value Decomposition: <http://demonstrations.wolfram.com/ImageCompressionViaTheSingularValueDecomposition/>

10.2 Программные средства

Выбор программных средств для реализации алгоритмов осуществляется студентом.

В домашних заданиях для рутинных алгебраических вычислений возможно использование систем Maple или Matlab, а также специализированных библиотек для C++ и Python.

10.3 Дистанционная поддержка дисциплины

Предусмотрена электронная переписка со студентами. Предполагается проведение дистанционных лабораторных работ.