Задачи к майнору «Логика»
Листок 2.

Моделью Крипке называется тройка $\mathcal{W} = (W, \preceq, v)$ такая, что

- W — это непустое множество, называемое множеством «возможных миров»,
- $\preceq$ — это частичный порядок на W, называемый отношением достижимости,
- $v\colon W \times \mathrm{Var} \to \{0, 1\}$ — это оценка переменных на W. Предполагается, что функция v монотонна, то есть, если $v(x, P) = 1$ и $x \preceq y$, то $v(y, P) = 1$.

Отношение $\mathcal{W}, x \models A$ истинности формулы A в мире x модели $\mathcal{W}$ определяется по индукции:

- $\mathcal{W}, x \models P \iff v(x, P) = 1$, если $P \in \mathrm{Var}$;
- $\mathcal{W}, x \models (A \wedge B) \iff (\mathcal{W}, x \models A$ и $\mathcal{W}, x \models B)$;
- $\mathcal{W}, x \models (A \vee B) \iff (\mathcal{W}, x \models A$ или $\mathcal{W}, x \models B)$;
- $\mathcal{W}, x \models (A \to B) \iff \forall y \succeq x\ (\mathcal{W}, y \models A \Rightarrow \mathcal{W}, y \models B)$;
- $\mathcal{W}, x \models \neg A \iff \forall y \succeq x\ (\mathcal{W}, y \not\models A)$.

Формула A называется *интуиционистской тавтологией* (*и-тавтологией*), если A истинна в любом мире любой модели Крипке.

1. Доказать, что для любой модели Крипке $\mathcal{W}$ и формулы A, если $\mathcal{W}, x \models A$ и $x \preceq y$, то $\mathcal{W}, y \models A$.

2. Установить, являются ли следующие формулы и-тавтологиями:
a) $P \to (\neg P \to Q)$;
b) $P \to \neg\neg P$;
c) $\neg\neg P \to P$;
d) $\neg\neg\neg P \to \neg P$;
e) $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$;
f) $(\neg\neg P \to P) \to (P \vee \neg P)$;
g) $\neg P \vee \neg\neg P$.

3. (Дизъюнктивное свойство) Доказать, что если $A \vee B$ является и-тавтологией, то таковой является по крайней мере одна из формул A или B. Верно ли это для классической логики?

4. (Допустимое, невыводимое правило) Доказать, что если формула A_1 вида $\neg A \to (B \vee C)$ и-тавтология, то такова и формула A_2 вида $(\neg A \to B) \vee (\neg A \to C)$. Является ли и-тавтологией $A_1 \to A_2$? Существуют ли аналогичные примеры для классической логики.

5. (Теорема Гливенко) Доказать, что A является классической тавтологией тогда и только тогда, когда $\neg\neg A$ является и-тавтологией.

6. Придумать формулу, истинную на всех моделях Крипке, для которых отношение $\preceq$ есть линейный порядок, но которая не являеся и-тавтологией.

7. Придумать формулу от одной переменной P, опровергаемую на некоторой модели глубины 2, но истинной на всех моделях глубины 1.

Аксиомы интуиционистского исчисления высказываний IPC:

1. $A \to (B \to A)$;
2. $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;
3. $A \wedge B \to A$;
4. $A \wedge B \to B$;
5. $A \to (B \to A \wedge B)$;
6. $A \to A \vee B$;
7. $B \to A \vee B$;
8. $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$;
9. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$;
10. $A \to (\neg A \to B)$.

Правило вывода *modus ponens*: $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$ (из A и $A \to B$ вывести B).

Классическое исчисление высказываний PC получается из интуиционистского добавлением аксиомы $\neg\neg A \to A$.

8. Выведите в **IPC** формулы
a) $A \vee B \to B \vee A$,
b) $A \to A \vee (A \wedge B)$,
c) $(A \wedge (A \to B)) \to A$,
d) $\neg(A \wedge \neg A)$.

9. Выведите в **PC** формулы
a) $A \vee \neg A$,
b) $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$.

10. Замкнуто ли исчисление **IPC** (**PC**) относительно следующих правил вывода:
a) $\dfrac{A \to \neg B}{B \to \neg A}$,
b) $\dfrac{(A \to B) \to A}{A}$?

11. Можно ли вывести противоречие в **PC** из следующего множества формул

$$\{P, P \to \neg Q, (R \to \neg P) \to Q\}?$$