

## Майнор логика, 2017. Семинар 1.

[http://www.mi.ras.ru/~bekl/minor\\_logic2017.html](http://www.mi.ras.ru/~bekl/minor_logic2017.html)

1. (Задачи от Льюиса Кэрролла) Сделать из набора утверждений логически обоснованный вывод. Помогает формализовать каждое утверждение как импликацию в логике высказываний и применять правила силлогизма и контрапозиции.<sup>1</sup>
  - (a) I despise anything that cannot be used as a bridge.  
Everything, that is worth writing an ode to, would be a welcome gift to me.  
A rainbow will not bear the weight of a wheelbarrow.  
Whatever can be used as a bridge will bear the weight of a wheelbarrow.  
I would not take, as a gift, a thing that I despise.
  - (b) No one, who is going to a party, ever fails to brush his hair.  
No one looks fascinating, if he is untidy.  
Opium eaters have no self-command.  
Everyone, who has brushed his hair, looks fascinating.  
No one wears white kid gloves, unless he is going to a party.  
A man is always untidy, if he has no self-command.
  - (c) Promise breakers are untrustworthy.  
Wine drinkers are very communicative.  
A man who keeps his promises is honest.  
No teetotalers are pawnbrokers.  
One can always trust a very communicative person.
  - (d) All writers, who understand human nature, are clever.  
No one is a true poet unless he can stir the hearts of men.  
Shakespeare wrote "Hamlet".  
No writer, who does not understand human nature, can stir the hearts of men.  
None but a true poet could have written "Hamlet".
2. Составьте таблицу истинности для формулы  $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow r)$ .
3. Определите, является ли каждая из данных формул тавтологией, выполнимой, тождественно ложной:  $p$ ,  $\neg\neg p \vee p$ ,  $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ ,  $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ ,  $\neg(p \wedge q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ .
4. Равносильны ли формулы:
  - (a)  $\neg p \wedge \neg q$  и  $\neg(p \vee q)$
  - (b)  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$  и  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

---

<sup>1</sup>Для решения задачи необязательно понимать смысл некоторых английских слов.

- (c)  $p \rightarrow (q \rightarrow r)$  и  $(p \wedge q) \rightarrow r$   
 (d)  $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$  и  $p \vee q$
5. Приведите к дизъюнктивной нормальной форме:
- (a)  $(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$   
 (b)  $(r \vee p) \leftrightarrow (r \wedge q)$
6. Можно ли выразить связки:
- (a)  $\rightarrow$  через  $\wedge$  и  $\vee$ ;  
 (b)  $\rightarrow$  через  $\leftrightarrow$ ;  
 (c)  $\vee$  через  $\rightarrow$ .
7. Является ли полным набор связок:
- (a)  $\{\rightarrow, \wedge\}$ ;  
 (b)  $\{\leftrightarrow, \perp\}$ ;

### Более сложные задачи

8. (Лемма об однозначном прочтении) Докажите, что всякая формула логики высказываний в языке со связками  $\neg, \wedge$  есть или переменная, или однозначно представляется в виде  $\neg A$  или  $(A \wedge B)$ . Докажите единственность дерева разбора любой формулы логики высказываний.
9. Докажите единственность дерева разбора любой формулы в польской записи.
10. Сколько вхождений подслов может иметь слово длины  $n$  в двухбуквенном алфавите?
11. Докажите, что число различных подформул формулы логики высказываний не превосходит её длины (количества символов).

### Домашнее задание

19. Приведите к ДНФ формулу:  $(p \vee q) \rightarrow (p \vee \neg r)$
20. Докажите, что следующая формула является тавтологией для любого  $n$ :

$$\bigwedge_{i=1}^{n+1} \bigvee_{j=1}^n p_{ij} \rightarrow \bigvee_{j=1}^n \bigvee_{i_1, i_2=1}^{n+1} (p_{i_1 j} \wedge p_{i_2 j}).$$