

Содержание лекций

1. Введение.
2. Предмет математической логики. Вопросы оснований математики.
3. Аксиоматическое построение элементарной геометрии, роль аксиомы о параллельных. Парадоксы теории множеств, семантические парадоксы. Формальный аксиоматический метод Гильберта, программа Гильберта. Роль теорем Гёделя о неполноте.
4. Логика высказываний. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме. Исчисление высказываний в секвенциальной форме Генцена. Теорема о полноте.
5. Интуиционизм как философия математики. Интерпретация интуиционистской логики по Брауэру-Гейтингу-Колмогорову. Интуиционистская логика высказываний, её модели Крипке. Теорема Крипке о полноте интуиционистской логики высказываний. Дизъюнктивное свойство. Теорема Гливенко.
6. Модальности и их возможные интерпретации. Модальные логики, логика $S4$, перевод Гёделя. Теорема о соответствии интуиционистской логики и модальной логики $S4$. Эпистемическое понимание модальности для системы с несколькими агентами. Логика $S5$, её полнота по Крипке. Модальность как доказуемость, логика доказуемости Гёделя-Лёба.
7. Логика предикатов.
8. Предикаты. Переменные и их области изменения. Кванторы. Языки первого порядка: термы, формулы, подформулы. Примеры языков первого порядка: язык арифметики, язык элементарной геометрии.
9. Интерпретации (алгебраические системы, модели) для данного языка первого порядка. Истинность замкнутой формулы в данной интерпретации. Предикаты, выразимые в данной интерпретации.
10. Аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Общезначимость аксиом исчисления предикатов. Теорема о корректности исчисления предикатов.
11. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов (без доказательства). Теорема о компактности для логики предикатов.
12. Нестандартные модели арифметики, их существование.
13. Описание отношения порядка для счётных нестандартных моделей арифметики.

14. Элиминация кванторов. Теорема Тарского о разрешимости теории поля вещественных чисел и элементарной геометрии.
15. Формальная арифметика, её стандартная модель.
16. Сигма-определимость в стандартной модели арифметики.
17. Эквивалентность понятий перечислимого и сигма-определимого множества. Неперечислимость множества арифметических истин. Проблема распознавания истинности замкнутых арифметических формул, её алгоритмическая неразрешимость. Теоремы Гёделя о неполноте формальной арифметики (вторая теорема Гёделя о неполноте без доказательства).