МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

Конспект спецкурса по математической логике

Лектор Лев Дмитриевич Беклемишев
Автор конспекта Александр Александрович Запрягаев

III курс, 5 – 6 семестры, поток математиков
Часть II: Исчисление высказываний

Москва, 2017 г.

Содержание

Предисловие

Предлагаемый конспект охватывает материалы курса лекций по математической логике, прочитанного профессором кафедры математической логики и теории алгоритмов Львом Дмитриевичем Беклемишевым и доцентом кафедры Татьяной Леонидовной Яворской на механико-математическом факультете МГУ в 2014-2015 учебном году. Курс охватывает четыре основных раздела логики: теорию множеств, исчисление высказываний, исчисление предикатов (теория моделей и теорема о полноте) и начала теории доказательств (теоремы о неполноте).

Данный текст ни в коем случае не претендует на истину в последней инстанции! Это не курс лекций, а лишь скромный конспект; вина за все опечатки и смысловые ошибки целиком и полностью возлагается на наборщика. Этот конспект не ставит перед собой цели заменить собой полноценный учебник по предмету и не претендует на полноту охвата предмета.

Эта сборка была скомпилирована 16 октября 2017 г.

Свежие сведения о спецкурсе и улучшениях данных материалов будут выкладываться на странице ВКонтакте `http://vk.com/id183071829`.

Для пожеланий, критических замечаний и сообщений об опечатках можно использовать и электронный адрес:

`rudetection@gmail.com`

Эпиграфы к главам текста целиком и полностью находятся на совести наборщика, помещены без согласия авторов, с грубым нарушением авторских прав и со своеобразной интерпретацией их отношения к основной теме повествования.

Документ подготовлен Александром Запрягаевым, студентом группы 304, в издательской системе LaTeX. Особая благодарность Анастасии Оноприенко, Арсению Каданеру и Ираклию Глунчадзе за неоценимую помощь, без которой этот конспект не увидел бы свет, а также Кириллу Корикову за ценные замечания.

1 Исчисление высказываний

1.1 Аксиоматика Гильберта. Классическая логика

Будем считать понятия формулы и интерпретации логики высказываний (иначе — *пропозициональной логики*) хорошо известными из обязательного курса введения в математическую логику. Вместо этого мы сконцентрируемся в основном на выводимости и исчислениях, рассмотрев две наиболее часто применяемых системы логических аксиом и правил вывода и полностью описав классы выводимых в них формул.

Пусть $p_0, p_1, \ldots$ — счётный набор пропозициональных символов, $\wedge, \vee$, $\to$, $\neg$ — логические связки. Следуя Гильберту, введём схемы аксиом:

1° $\varphi \to (\psi \to \varphi)$.

2° $(\varphi \to (\psi \to \theta)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \theta))$.

3° $\varphi \wedge \psi \to \varphi$, $\varphi \wedge \psi \to \psi$.

4° $\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$.

5° $\varphi \to \varphi \vee \psi$, $\psi \to \varphi \vee \psi$.

6° $(\varphi \to \theta) \to ((\psi \to \theta) \to ((\varphi \vee \psi) \to \theta))$.

7° $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$.

8° $\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$ (ex falso sequitur quodibet)

9° $\neg\neg\varphi \to \varphi$. (снятие двойного отрицания)

Правило вывода единственно: modus ponens (MP).

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi}$$

Определение. *Вывод* — это последовательность формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, в которой каждая φ_i — или аксиома, или получена из каких-либо φ_k и φ_l по MP. Обозначают $\vdash \varphi$ и говорят «φ выводимо», если существует вывод, оканчивающийся на формулу φ.

Понятным образом объясняется и понятие *вывода из гипотез* Γ: пусть Γ — множество формул (называемых *гипотезами*); тогда в выводе из гипотез всякая формула либо аксиома, либо принадлежит Γ, либо получена модус поненсом из двух ранее выписанных. Обозначение: $\Gamma \vdash \varphi$.

Приведём конкретный пример вывода, который нам скоро пригодится.

Утверждение 1.1 $\vdash \varphi \to \varphi$ *для любой* φ.

$\square$ Про аксиомы, начиная с третьей, забудем: говорим только об импликации. В аксиому 2 подставим $\varphi = \varphi$, $\theta = \varphi$, $\psi = (\varphi \to \varphi)$:

1° $\varphi \to (\varphi \to \varphi)$ (1)

2° $\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$ (1)

3° $(\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$ (2)

4° $(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$ (MP из 2, 3)

5° $\varphi \to \varphi$ (MP из 1, 4). $\blacksquare$

Теперь приведём пример вывода из гипотез.

Пример 1. $p \wedge q \vdash q \wedge p$.

$\square$

1° $p \wedge q$

2° $p \wedge q \to p, p \wedge q \to q$

3° p, q

4° $q \to (p \to (q \wedge p))$

5° $q \wedge p$ по MP. $\blacksquare$

Логика без аксиомы 9 носит название *интуиционистской*. Почти все доказанные нами факты, кроме особо оговорённых, действительны не только в классической логике высказываний, но и в ней. При удалении аксиом 8 и 9 одновременно получается *минимальная логика,* на изучении которой мы останавливаться не будем.

Не требует доказательства ряд важных свойств выводимости из гипотез[1].

Лемма 1.2 **1°** $\Gamma \vdash \varphi$ *и* $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow \Delta \vdash \varphi$ *(монотонность)*

2° $\Gamma \vdash \varphi$ *и* $\forall \psi \in \Gamma\ \Delta \vdash \psi \Rightarrow \Delta \vdash \varphi$ *(транзитивность)*

3° $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow$ *существует конечное* $\Delta \subseteq \Gamma :\ \Delta \vdash \varphi$ *(компактность)*

[1] Впрочем, существуют исчисления, в которых понятие вывода определяется иначе, и эти свойства перестают выполняться, что может оказаться полезным в приложениях. Так, немонотонным логикам посвящён целый раздел логики высказываний.

И в классической, и в интуиционистской логике верна

Теорема 1.3 (О дедукции) $\Gamma, \varphi \vdash \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

$\square$

$\boxed{\Leftarrow}$ Очевидно.

$\boxed{\Rightarrow}$ Индукция по длине вывода $\Gamma, \varphi \vdash \psi$. Возможны четыре случая.

1° ψ есть аксиома. Тогда достроим вывод так: $\psi \to (\varphi \to \psi)$, $\varphi \to \psi$.

2° $\psi \in \Gamma$. То же самое: допишем ψ, $\psi \to (\varphi \to \psi)$, $\varphi \to \psi$.

3° $\psi = \varphi$. Тогда нужно написать вывод для $\varphi \to \varphi$, что мы научились делать.

4° ψ получена правилом MP из θ и $\theta \to \psi$. По предположению индукции, есть выводы: $\Gamma \vdash \varphi \to \theta$, $\Gamma \vdash \varphi \to (\theta \to \psi)$. Допишем их к нашему текущему выводу, затем дополним $(\varphi \to (\theta \to \psi)) \to ((\varphi \to \theta) \to (\varphi \to \psi))$, $(\varphi \to \theta) \to (\varphi \to \psi)$, $\varphi \to \psi$.

$\blacksquare$

Пример 2. Закон контрапозиции: $\varphi \to \psi \vdash \neg\psi \to \neg\varphi$.

$\square$ По теореме о дедукции, достаточно показать $\neg\psi, \varphi \to \psi \vdash \neg\varphi$. Проведём следующий вывод:

$(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \neg\varphi)$. (7)

ψ (гипотеза)

$\neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$ (1)

$\varphi \to \neg\psi$ (по MP)

$\neg\varphi$ (по MP) $\blacksquare$

Пример 3. Силлогизм: $\varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \varphi \to \theta$.

$\square$ $\varphi, \varphi \to \psi, \psi \to \theta \vdash \theta$. Два раза модус поненс. $\blacksquare$

Пример 4. Аксиома 8 следует из 9: $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$.

$\square$ Докажем, что $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\neg\psi$. По теореме о дедукции, достаточно сделать $\neg\psi \to \varphi, \neg\psi \to \neg\varphi \vdash \neg\neg\varphi$ — по аксиомам 1 и 7. $\blacksquare$

Пример 5. $\vdash A \to \neg\neg A$.

$\square$ $(\neg A \to A) \to ((\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A)$ (аксиома 7)

$A \to (\neg A \to A)$ (1)

A (гипотеза)

$\neg A \to A$ (MP 2,3)

$(\neg A \to \neg A) \to \neg\neg A$ (MP)

$\neg A \to \neg A$ (умеем)

$\neg\neg A$ (MP 5,6) $\blacksquare$

Пример 6. Обращение закона контрапозиции (только классическая логика!): $\neg B \to \neg A \vdash A \to B$.

$\square$ $\neg B \to \neg A$

$\neg\neg A \to \neg\neg B$

$\neg\neg B \to B$

$\neg\neg A \to B$

$A \to \neg\neg A$

$A \to B$. $\blacksquare$

Пример 7. $A \wedge B \to C \vdash A \to (B \to C)$,

$A \to (B \to C) \vdash A \wedge B \to C$.

$\square$

1° $A \wedge B \to C$ (гипотеза)

A (гипотеза)

B (гипотеза)

$A \to (B \to A \wedge B)$ (4)

$A \wedge B$ (MP дважды)

C (MP 1,5)

2° $A \to (B \to C)$ (гипотеза)

$A \wedge B$ (гипотеза)

$A \wedge B \to A$ (3)

$A \wedge B \to B$ (3)

A (MP 2,3)

B (MP 2,4)

C (MP 1,5,6 дважды) $\blacksquare$

Главным утверждением этой части курса служит:

Теорема 1.4 (О корректности и полноте) $\vdash A \Leftrightarrow A$ — *тавтология.*

$\square$ $\boxed{\Rightarrow}$ Индукция по построению вывода. Все аксиомы являются тавтологиями (проверка таблиц истинности всех аксиом). Если применяется модус поненс, то по предположению индукции A и $A \to B$ истинны на всех наборах переменных. Тогда B истинно по определению импликации.

$\boxed{\Leftarrow}$ Докажем, что всякая тавтология выводима. Приведём вариант рассуждения, который впоследствии будет удобно обобщить на интуиционистское исчисление высказываний и исчисление предикатов. Утверждение теоремы будет следовать из ряда лемм.

Определение. Пусть Γ — множество формул; будем говорить, что Γ непротиворечиво, если $\forall A_1, \ldots, A_n \in \Gamma \ \nvdash \neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$. Γ максимально непротиворечиво, если $\forall A \in \mathrm{Fm}\, (A \in \Gamma \vee \neg A \in \Gamma)$.

Лемма 1.5 (0) *Пусть* Γ *непротиворечиво,* $A \in \mathrm{Fm}$. *Тогда одно из множеств* $\Gamma \cup \{A\}$ *или* $\Gamma \cup \{\neg A\}$ *непротиворечиво.*

$\square$ От противного: пусть Γ непротиворечиво, но оба множества $\Gamma \cup \{A\}$ и $\Gamma \cup \{\neg A\}$ оказываются противоречивыми. Это означает, что существуют такие $A_1, \ldots, A_j \in \Gamma$, что $\vdash \neg(A \wedge \bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i)$ и $\vdash \neg(\neg A \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{n} A_j)$. Аккуратно применяя правило контрапозиции для того конечного поднабора формул в Γ, что участвует в обоих этих выводах, устанавливаем, что тогда на самом деле выводятся и $\vdash \neg(A \wedge \bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{n} A'_j)$ и $\vdash \neg(\neg A \wedge \bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{n} A'_j)$. Далее обозначим $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} A_i \wedge \bigwedge\limits_{j=1}^{n} A'_j$ за B. Таким образом, имеем $\vdash \neg(A \wedge B)$ и $\vdash \neg(\neg A \wedge B)$, что по аксиоме 8 влечёт $\neg(A \wedge B) \to (A \wedge B \to C)$ (C любое). Далее:

$\neg(A \wedge B)$

$A \wedge B \to C$

$B \to (A \to C)$

Но C – любое, поэтому аналогичные утверждения можно повторить и для $\neg C$, выведя, тем самым, и$B \to (A \to \neg C)$. Аксиома 7 далее приводит нас к $B \to \neg A$. Однако $\neg A$ позволяет провести точно такой де вывод и прийти к $B \to A$, что, опять же по аксиоме 7, позволяет вывести $\neg B$. Согласно определению непротиворечивости, это означает, что множество Γ было противоречивым изначально. Утверждение доказано. $\blacksquare$

Лемма 1.6 (1) *Если* Γ *непротиворечиво, то существует максимально непротиворечивое* $\Gamma' \supseteq \Gamma$.

$\square$ Если множество переменных счётно, то и формул счётное число; будем добавлять всякую формулу либо отрицание по порядку. Счётное объединение в пределе тоже непротиворечиво, ибо непротиворечивость устанавливается конечным числом формул (по определению) и поэтому должна проявиться на конечном шаге. Пусть оно несчётно. Рассмотрим класс всех непротиворечивых множеств, упорядоченный по включению. По только что сказанному, всякая цепь имеет верхнюю грань. Тогда существует максимальный элемент, в котором в силу леммы 0 лежит всякая либо формула, либо отрицание. Значит, он максимально непротиворечив. $\blacksquare$

Лемма 1.7 (2) *Пусть* Γ *максимально непротиворечиво. Тогда*

0° $\Gamma \vdash A \Leftrightarrow A \in \Gamma$.

1° $\Gamma \ni A \land B \Leftrightarrow \Gamma \ni A$ *и* $\Gamma \ni B$.

2° $\Gamma \ni A \lor B \Leftrightarrow \Gamma \ni A$ *или* $\Gamma \ni B$.

3° $\Gamma \ni \neg A \Leftrightarrow \Gamma \not\ni A$.

4° $\Gamma \ni A \to B \Leftrightarrow \Gamma \not\ni A$ *или* $\Gamma \ni B$.

$\square$

0° Пусть $\Gamma \vdash A$, но $A \notin \Gamma$. Тогда должно быть $\Gamma \ni \neg A$. В частности, существует вывод $\neg A$ из Γ; пусть $A_1, \ldots, A_n \in \Gamma$ — гипотезы, участвующие в этом выводе. Тогда $\vdash \neg(\neg A \land A_1 \land ... \land A_n)$ (ибо без отрицания она выводит $\neg A$ и A одновременно — аксиома 7!). Но Γ непротиворечиво. Противоречие.

Все последующие номера — упражнение с заменой выводимости на принадлежность, состоящее в честном переборе всех возможных по таблицам случаев и ссылкой на предположение индукции.

$\blacksquare$

Пусть A — невыводимая тавтология. Тогда $\Gamma_0 = \{\neg A\}$ непротиворечиво. Расширим его до максимально непротиворечивого Γ. Зададим оценку такую, что $v(p) = 1 \Leftrightarrow p \in \Gamma$, и 0 иначе.

Лемма 1.8 (Основная) $\forall F \in \mathrm{Fm}\, v(F) = 1 \Leftrightarrow F \in \Gamma$.

Проверив этот факт индукцией по построению формулы, расширяем непротиворечивое множество формул до максимально непротиворечивого. Тогда, по основной лемме, существует оценка, обращающая все формулы расширенного (а, значит, и исходного Γ) множества в истину. Теорема о полноте доказана. ■

1.2 Интуиционистская логика высказываний

В обычной логике адекватное понятие истинности — «быть тавтологией». Но в интуиционистской логике, хотя выводятся по-прежнему лишь тавтологии, совокупность всех выводимых формул у́же, нежели в классической[2]. Возникает вопрос: как можно описать класс всех выводимых в Int формул? Ответом служит строящаяся ниже *семантика Крипке.*

Определение. $K = (W, R, v)$, где пара (W, R) называется *шкалой,* W — множество всех возможных миров, $R \subseteq W^2$ — рефлексивно и транзитивно, оценка $v(p) \subseteq W$ удовлетворяет свойству наследования истинности в видимых мирах: если $x \in v(p)$ и xRy, то и $y \in v(p)$.

Пусть $x \in W$, $F \in \mathrm{Fm}$. Определим истинность в конкретном мире так: $K, x \models F \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$

1° $K, x \models p \Leftrightarrow x \in v(p)$.

2° $\vee, \wedge$ — по таблицам истинности.

3° $K, x \models \neg F \Leftrightarrow \forall y (xRy \Rightarrow \not\models F)$.

4° $K, x \models (F \to G) \Leftrightarrow \forall y (xRy \Rightarrow y \not\models F \vee y \models G)$.

Утверждение 1.9 $\models$ *монотонно, то есть* $\forall x, y \in W\ \forall F \in \mathrm{Fm}$, *если* $x \models F$ *и* xRy, *то* $y \models F$.

□ Индукция по построению формулы. ■

Определение. $K \models A$, если A истинно во всех мирах всех шкал Крипке.

[2]Традиционный пример — формула $p \vee \neg p$.

Утверждение 1.10 $\neg A \lor B \to (A \to B)$ *(можно проверить). Напротив,* $(A \to B) \to (\neg A \lor B)$ *не является тавтологией семантики Крипке: Пусть* $x \to y$ *— два мира, и в* y *выполняются* A *и* B*. Тогда* $v(A) = v(b) = y$*, но* $x \models A \to B$*,* $x \not\models B$*,* $x \not\models \implies x \not\models \neg A \lor B$*.*

Теорема 1.11 (О корректности и полноте) **1°** *Если* $\mathrm{Int} \vdash A$*, то тогда* $K \models A$*.*

2° *Если* $\mathrm{Int} \nvdash A$*, то существует конечная* K*,* $x \in W$*, что* $K, x \not\models A$*.*

□

1° Индукция по выводу. Истинность аксиом проверяется непосредственно[3]. Шаг индукции — это применение правила вывода. Истинность B при условиях A, $A \to B$ следует из определения импликации в шкале.

2° Не имея закона исключённого третьего, мы не можем говорить, что либо формула, либо её отрицание содержится в максимальной непротиворечивой паре. Поэтому будем рассматривать пары: множество истинных и множество ложных формул. Как сузим до конечных?

Пусть $Sub(A)$ — множество подформул A.

Определение. Пара (Γ, Δ) *непротиворечива,* если $\mathrm{Int} \nvdash (\land\Gamma) \to (\lor\Delta)$. Пара *максимально непротиворечива,* если дополнительно к этому $\Gamma \cup \Delta = Sub(A)$.

Лемма 1.12 (1) *Если* (Γ, Δ) *— непротиворечива, то существует максимально непротиворечивая* (Γ', Δ') *такая, что* $\Gamma \subseteq \Gamma'$*,* $\Delta \subseteq \Delta'$*.*

□ Пусть $B_1, \ldots, B_n$ — все подформулы A, (Γ, Δ) непротиворечиво, тогда $(\Gamma \cup \{B_i\}, \Delta)$ или $(\Gamma, \Delta \cup \{B_i\})$ — непротиворечиво. В самом деле: пусть оба они противоречивы. Тогда $\mathrm{Int} \vdash (\bigwedge \Gamma) \land B_i \to (\bigvee \Delta)$ и $\mathrm{Int} \vdash (\bigwedge \Gamma) \to (\bigvee \Delta) \lor B_i$. (Обозначим для краткости $\bigwedge \Gamma = G; \bigvee \Delta = D$.) Итак, строим вывод:

1° $G \land B_i \to D$

[3] Однако не все тавтологии верны во всех мирах: пусть дана формула $((p \to q) \to p) \to p$, и пара миров $x \to y$, где p истинно только в y. Тогда $y \not\models p \to q$, $x \models p \to q$, $x \models (p \to q) \to p$.

2° $G \to B_i \vee D$

3° G (гипотеза)

4° $B_i \vee D$ (MP 2,3)

5° $G \to (B_i \to D)$ (раскрываем по теореме о дедукции)

6° $B_i \to D$ (MP 3,5)

7° $D \to D$ (уже умеем)

8° $(B_i \to D) \to ((D \to D) \to (B_i \vee D \to D))$ (аксиома)

9° D (MP трижды)

■

Лемма 1.13 (2) *Пусть* (Γ, Δ) *— максимально непротиворечивое. Тогда:*

1° *если* $A \wedge B \in \Gamma$, *то* $A, B \in \Gamma$; *если* $A \wedge B \in \Delta$, *то* $A \in \Delta$ *или* $B \in \Delta$;

2° *если* $A \vee B \in \Gamma$, *то* $A \in \Gamma$ *или* $B \in \Gamma$; *если* $A \vee B \in \Delta$, *то* $A, B \in \Delta$;

3° *если* $A \to B \in \Gamma$, *то* $B \in \Gamma$ *или* $A \in \Delta$;

4° *если* $\neg A \in \Gamma$, *то* $A \in \Delta$.

□

1° От противного: пусть $B \wedge C \in \Gamma$, но $B \notin \Gamma$. Тогда $B \in \Delta$. Тогда $(B \wedge C \in) \wedge \Gamma \to B \wedge C \to B \to \vee\Delta(\ni B)$, и (Γ, Δ) — противоречивое.

Пусть $B \wedge C \in \Delta$, но $B, C \notin \Delta$; следовательно, $B, C \in \Gamma$. Тогда $(B, C \in) \wedge \Gamma \to B \wedge C \to \vee\Delta(\ni B \wedge C)$. Аналогично.

2° Тем же способом.

3° Пусть $B \to C \in \Gamma, C \notin \Gamma$ и $B \notin \Delta \Rightarrow C \in \Delta, B \in \Gamma$. Тогда $\wedge\Gamma \to \vee\Delta$. ■

Теперь мы готовы определить опровергающую модель. Положим $K = (W, R, v)$, причём:

W — множество всех максимально непротиворечивых пар;

$(\Gamma, \Delta) R (\Gamma', \Delta')$, если $\Gamma \in \Gamma'$;

$v(p) = \{(\Gamma, \Delta) \mid p \in \Gamma\}$.

Лемма 1.14 (3) *W непусто и конечно, R рефлексивно и транзитивно, v — монотонно относительно R.*

□ W непусто (кладём невыводимую A в Δ и расширяем) и конечно (Γ и Δ — подмножества конечных множеств). Рефлексивность и транзитивность очевидны. Монотонность прямо следует из согласованности определений R и v. ■

Лемма 1.15 (4, основная семантическая лемма) *Пусть даны максимально непротиворечивая пара* $(\Gamma, \Delta) \in W$ *и формула* $B \in Sub(a)$. *Тогда*

$B \in \Gamma \Rightarrow (\Gamma, \Delta) \models B$;

$B \in \Delta \Rightarrow (\Gamma, \Delta) \not\models B$.

□ Индукция по построению формулы B. База обеспечивается определением оценки v. Конъюнкция: $B_1 \wedge B_2 \in \Gamma \overset{\text{л. 2}}{\Longrightarrow} B_1, B_2 \in \Gamma$. По индукции, $(\Gamma, \Delta) \models B_1, B_2 \Rightarrow (\Gamma, \Delta) \models B_1 \wedge B_2$. Наоборот, $B_1 \wedge B_2 \in \Delta \overset{\text{л. 2}}{\Longrightarrow} B_1 \in \Delta$ или $B_2 \in \Delta$. По индукции, $(\Gamma, \Delta) \not\models B_1$ или $(\Gamma, \Delta) \not\models B_2 \Rightarrow (\Gamma, \Delta) \models B_1 \wedge B_2$. Дизъюнкция разбирается симметрично.

Импликация: пусть $B_1 \to B_2 \in \Gamma$. Тогда $(\Gamma, \Delta)R(\Gamma', \Delta')$, по определению R, означает, что $\Gamma \in \Gamma' \Rightarrow B_1 \to B_2 \in \Gamma' \overset{\text{л. 2}}{\Longrightarrow} B_1 \in \Delta'$ или $B_2 \in \Gamma'$, откуда по индукции получаем $(\Gamma', \Delta') \not\models B_1$ или $(\Gamma', \Delta') \models B_2$. Следовательно, $(\Gamma, \Delta) \models B_1 \to B_2$. В случае $B_1 \to B_2 \in \Delta$. Рассмотрим $(\Gamma \cup \{B_1\}, \{B_2\})$.

Эта пара непротиворечива: в самом деле, если бы формула $\Gamma \wedge B_1 \to B_2$ была выводимой, то, по теореме о дедукции, выводилось бы и $\Gamma \to (B_1 \to B_2)$. Но, поскольку $(B_1 \to \mathbb{B}_2) \in \Delta$, это означало бы, что и исходная пара (Γ, Δ) уже была противоречивой! Итак, по лемме 1 расширяем $(\Gamma \cup \{B_1\}, \{B_2\})$ до максимально непротиворечивой пары (Γ', Δ'). Очевидно, что в силу $\Gamma \subseteq (\Gamma \cup \{B_1\}) \subseteq \Gamma'$ выполнено соотношение $(\Gamma, \Delta)R(\Gamma', \Delta')$; кроме того, $(\Gamma', \Delta') \models B_1$; $(\Gamma', \Delta') \not\models B_2$ (предположение индукции). Итак, $(\Gamma, \Delta) \not\models B_1 \to B_2$. ■

Пусть теперь $\mathrm{Int} \nvdash A$. Тогда $(\varnothing, \{A\})$ — непротиворечиво. Расширим до максимально непротиворечивого $(\Gamma, \Delta) \in W$, где $A \in \Delta$. Тогда $(\Gamma, \Delta) \not\models A$ (так как $A \in \Delta$!). Теорема доказана. ■

На самом деле, верно и более сильное утверждение.

Теорема 1.16 *Можно считать опровергающую модель деревом.*

□ Сузим рассмотрение до $W' \stackrel{\text{def}}{=} \{x \mid aRx\}$ (a — точка, где опровергается A; R здесь остаётся рефлексивным и транзитивным). $K' = (W', R, v)$, и, по-прежнему, $K, a \not\models A$. Перейдём теперь к новой структуре, вершинами которой объявляются все маршруты, по которым можно дойти из опровергающей вершины до текущей в соответствии с отношением R. Таким образом, каждая прежняя вершина расщепляется на несколько по числу незацикливающихся путей, ведущих в неё; оценка остаётся неизменной. В силу конечности модели данное построение приводит к опровергающему конечному дереву, и даже, более того, опровержение A можно считать происходящим непосредственно в его корне. ■

Следствие 1.1 *Свойство дизъюнктивности:* $\mathrm{Int} \vdash A \vee B \Rightarrow \mathrm{Int} \vdash A$ *или* $\mathrm{Int} \vdash B$.

□ Пусть $\mathrm{Int} \nvdash A$ и $\mathrm{Int} \nvdash B$. Построим деревья K_1 и K_2, в нижних точках a_1 и a_2 которых опровергаются A и B. Добавим новый корень a_0, направленный к a_1 и a_2, в котором объявим ложным всё. Тогда истинности в поддеревьях не нарушаются, но $a_0 \not\models A \vee B$. ■

Продолжим выводить следствия об особенностях интуиционистской логики.

Следствие 1.2 *Интуиционистская логика разрешима (то есть разрешимо множество всех теорем интуиционизма).*

□ Все теоремы интуиционизма можно перечислить: строим всевозможные выводы (счётное число) и выписываем конечные формулы в них. Так перечисляются все теоремы. Обратно, дополнение всех формул до Int перечислимо: пусть формула не является теоремой; тогда существует конечная модель Крипке, опровергающая её. Перечисляем все модели и пробуем проверить в них истинность нашей формулы; как только нашли опровергающую, выдадим 0 и остановим процесс. Так построена полухарактеристическая функция для $\mathrm{Fm} \setminus \mathrm{Int}$, равная 1 на нём и не определённая на ней. По теореме Поста (запустим оба алгоритма одновременно, выдавая 1, если нашли её в алгоритме 1 и 0, если завершился алгоритм 2!) мы рано или поздно получим ответ о том, является ли формула теоремой Int. ■

Теорема 1.17 (Гливенко) $\mathrm{CL} \vdash \varphi \iff \mathrm{Int} \vdash (\neg\neg\varphi)$.

□ $\boxed{\Leftarrow}$ Очевидно: выведем формулу аксиомами Int, все они у нас есть; в конце снимем двойное отрицание.

$\boxed{\Rightarrow}$ От противного: пусть $\mathrm{Int} \nvdash \neg\neg\varphi$. Построим опровергающее дерево для $\neg\neg\varphi$. Поскольку в корне $\not\models \neg(\neg\varphi)$, то есть вершина x, в которой $x \models \neg\varphi$. Отсюда во всех $xRy \Rightarrow y \not\models \varphi$: на любом листе поддерева $y \not\models \varphi$. Пусть xRy, где y — лист в дереве. Но в листах дерева и отрицание, и импликация устроены по классическому образцу, то есть в них моделируется классическая логика! Итак, $y \not\models \varphi$ уже в «классике»; значит, она не является тавтологией, и $\mathrm{CL} \nvdash \varphi$. ■

Теорема 1.18 (Гёдель) *Интуиционистская логика не конечнозначна: это значит, что нельзя предложить n значений истинности с выделенной единицей и интерпретировать дизъюнкцию, конъюнкцию, импликацию и отрицание обычными функциями двумя (одной) дискретных переменных, чтобы воспроизвести интуиционистскую логику как множество формул, принимающих тождественно единицу. (Так,* CL *двузначна.)*

□ От противного: пусть логика Int n-значна ($n \geqslant 2$). Рассмотрим формулу $I_n \overset{\text{def}}{=} \bigvee\limits_{0 \leqslant i < j \leqslant n} (p_i \leftrightarrow p_j)$. Очевидно, что она не выводима в интуиционистской логике: построим дерево из корня и $n+1$ листов $a_1, \ldots, a_n$, в каждом из которых положим истинным ровно одно из p_i со своим номером, а в корне ложны все. Тогда в корне ложна всякая из представленных эквивалентностей, а значит, и дизъюнкция в целом. Однако в любой n-значной логике функция, соответствующая такой формуле, содержала бы не более n различных значений на $(n+1)$ переменную, по принципу Дирихле одна из эквивалентностей обращалась бы в единицу и обращала бы в единицу и всю формулу I_n. Противоречие. ■

Назовём правилом вывода любую фигуру вида: $(\varphi_i, \varphi \in \mathrm{Fm})$

$$\frac{\varphi_0, \ldots, \varphi_n}{\varphi.}$$

Скажем, что правило допустимо, если для любых i и σ $L \vdash \varphi_{i\sigma}$ следует $L \vdash \varphi_\sigma$. Правило выводимо, если

$$\frac{\varphi_0, \ldots, \varphi_n \vdash \varphi}{\varphi_{0\sigma}, \ldots, \varphi_{n\sigma} \vdash \varphi_\sigma.}$$

Выводимые правила допустимы; в классической логике верно и обратное, а в интуиционизме — нет! Правило Скотта:

$$\frac{(\neg\neg p \to p) \to p \vee \neg p}{\neg p \vee \neg\neg p}$$

Оно допустимо, но не выводимо. В самом деле, по теореме о дедукции для второго достаточно доказать, что Int $\nvdash ((\neg\neg p \to p) \to p \vee \neg p) \to \neg p \vee \neg\neg p$. Построим модель 1->2, 1->3, 2->4, где в 4 истинно p. Тогда в a ложны и $\neg p$, (по 4) и $\neg\neg p$ (по 3, где $\neg p$). Тогда в 1 истинна посылка: в 4 $p \vee \neg p$, потому что p, а в 3 — потому что $\neg p$; в 2 $\not\models \neg\neg p \to p$: во всех точках есть посылка либо нет заключения, и вся формула в 1 ложна. Для допустимости заметим, что единственная разрешённая подстановка σ — это заменить p на какую-то формулу φ. Допустим, что Int $\nvdash \neg\varphi \vee \neg\neg\varphi$. Построим модель, в корне которой она ложна. Тогда Int $\nvdash \neg\varphi$ и Int $\nvdash \neg\neg\varphi$. Используя теорему Гливенко и снятие *тройного* отрицания в интуиционизме, получаем CL $\nvdash \neg\varphi$ и CL $\nvdash \varphi$. Построим два дерева, в корнях которых $\not\models \neg\varphi$ и $\not\models \varphi$ соответственно, добавим к ним новый корень, в нём будет $\not\models \neg\neg\varphi$, верхняя формула верна, а нижняя — нет.

Список литературы

[VS1] Н. Верещагин, А. Шень. Начала теории множеств. М.: Издательство МЦНМО, 2008.

[VS2] Н. Верещагин, А. Шень. Языки и исчисления. М.: Издательство МЦНМО, 2008.

[VS3] Н. Верещагин, А. Шень. Вычислимые функции. М.: Издательство МЦНМО, 2008.

[Men] Э. Мендельсон. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1984.

[Mar] David Marker. Model Theory: an Introduction. 2002.

Последняя компиляция: 16 октября 2017 г.
Обновления документа – на странице http://vk.com/id183071829.
Об опечатках и неточностях пишите на rudetection@gmail.com.