Майнор логика, 2017. Семинар 3.

1. Рассмотрим евклидову плоскость как модель языка элементарной геометрии Тарского, содержащего предикатные символы $B(x, y, z)$ «точка y лежит на отрезке xz», $x = y$ «точки x и y совпадают» и $xy \cong uv$ «отрезки xy и uv имеют равную длину». Запишите следующие высказывания в виде формул этого языка:

   а) Треугольник xyz равносторонний.

   б) Прямые xy и uv параллельны.

   в) Прямые xy и uv перпендикулярны.

   г) Угол $\angle xyz$ равен $60°$.

2. Докажите, что для любой модели языка первого порядка объединение, пересечение и разность двух определимых множеств есть определимое множество.

3. Выразите следующие множества и предикаты в данных моделях:

   а) $\{0\}$, $\{2\}$, $x = y$ в $(\mathbb{N}, <)$,

   б) $x = y$, $x = y + 1$ в $(\mathbb{Z}, <)$,

   в) $x = 0$, $x = -y$ в $(\mathbb{Z}, +, =)$.

4. Выразите в модели $(\mathbb{N}, \times, <)$

   а) $\{0\}$, $\{1\}$;

   б) множество всех простых чисел;

   в) множество всех степеней двойки.

5. а) Докажите, что в модели $(\mathbb{Z}, +, =)$ не выразим предикат $x < y$.

   б) Докажите, что в модели $(\mathbb{N}, \times, =)$ не определимо множество $\{2\}$.

6. Приведите следующие формулы к предваренной нормальной форме:

   а) $\exists x \forall y\, P(x, y) \to \exists y \forall x\, P(x, y)$;

   б) $\neg \forall y \big(P(a) \to (E(a, y) \vee \exists x\, Q(x, y))\big)$;

   в) $\neg \forall x \forall y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y)$;

   г) $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists x \forall y (B(x) \to C(y))$.

7. Общезначимы ли следующие формулы? Если да, то докажите, если нет, то приведите контрпример.

   а) $\exists y \forall x P(x, y) \to \forall x \exists y P(x, y)$;

   б) $\forall x \exists y P(x, y) \to \exists y \forall x P(x, y)$.

8. Докажите, что следующие формулы истинны во всякой конечной модели, но не общезначимы:

   а) $\forall x \forall y \forall z (R(x, x) \wedge (R(x, z) \to (R(x, y) \vee R(y, z)))) \to \exists x \forall y R(x, y)$;

   б) $\exists x \forall y \exists z ((Q(y, z) \to Q(x, z)) \to (Q(x, x) \to Q(y, x)))$.