Майнор логика, 2017. Семинар 4.

Определение. $T \vdash A$ означает, что формула A выводима в теории T. $\vdash A$ означает, что A выводима в исчислении предикатов с равенством. $T \vdash S$ означает, что все формулы из S выводимы в T. $T \equiv S$ означает $T \vdash S$ и $S \vdash T$. Теория T называется *конечно аксиоматизируемой*, если $T \equiv S$ для некоторого конечного множества формул S. T называется *полной*, если T непротиворечива и для любой замкнутой формулы A в языке T имеет место $T \vdash A$ или $T \vdash \neg A$.

1. Докажите, что следующая формула является общезначимой:
$$\exists x(A(x) \to \forall y A(y)).$$

2. Выведите следующие правила в исчислении предикатов (см. стр. 2):
   а) $T \vdash \forall x A(x)$, если и только если $T \vdash A(x)$;
   б) (правило контрапозиции) если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\neg B \to \neg A)$;
   в) если $T \vdash (A \to B)$, то $T \vdash (\exists x A \to \exists x B)$.

В решении всех следующих задач можно пользоваться теоремами о полноте и о компактности для логики предикатов.

3. Множество $\mathsf{Th}(M)$ всех предложений истинных в модели M называется *элементарной теорией модели* M. Докажите: теория T полна тогда и только тогда, когда существует модель M для которой $T \equiv \mathsf{Th}(M)$.

4. Докажите, что $\mathsf{Th}(\mathbb{R}; +, \cdot) \neq \mathsf{Th}(\mathbb{Q}; +, \cdot)$.

5. Всякая непротиворечивая теория T в счетной сигнатуре имеет полное расширение $S \vdash T$ той же сигнатуры.

6. (*) Если формула A выполнена на всех бесконечных группах, то A выполнена на всех конечных группах мощности больше некоторого $n \in \mathbb{N}$.

7. (*) Докажите, что теория полей нулевой характеристики (a) неполна, (b) не является конечно аксиоматизируемой.

8. (*) *Спектром* формулы A назовём множество $\{n \in \mathbb{N} \mid A$ имеет модель мощности n, $n > 0\}$.
   а) Постройте формулу в сигнатуре с равенством, которая имеет спектр $\{2, 3\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n > 4\}$;
   б) Докажите, что совокупность спектров всех формул (произвольной сигнатуры) замкнута относительно операций пересечения и объединения;
   в) Существует ли формула, спектр которой есть множество всех чётных чисел?
   г) Существует ли такая формула в сигнатуре только с символом равенства?
   д) Существует ли такая формула в сигнатуре без символа равенства?

9. (*) (теорема Эрбрана) Если $\vdash \exists x A(x)$, где A — бескванторная формула, то найдётся конечная последовательность термов $t_1, \ldots, t_n$, такая что $\vdash A(t_1) \vee \cdots \vee A(t_n)$. *Указание.* Рассуждайте от противного и воспользуйтесь теоремой о компактности.

10. Пусть $B = \exists x_1 \ldots \exists x_n A$ — формула в языке без функциональных символов и констант, где A бескванторна. Докажите, что если B выполнима, то она имеет конечную модель мощности не выше n.

Справка: аксиомы и правила вывода исчисления предикатов

Аксиомы:

A1. Примеры тавтологий логики высказываний;

A2. $(\forall x A[a/x]) \to A[a/t]$, где t терм;

A3. $A[a/t] \to (\exists x A[a/x])$, при том же условии;

A4. Аксиомы равенства:

1. $x = x$;
2. $x = y \to y = x$;
3. $x = y \wedge y = z \to x = z$;
4. $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to (P(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow P(y_1, \ldots, y_n))$;
5. $x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$.

Схему аксиом A1 мы понимаем следующим образом. Если $A(p_1, \ldots, p_n)$ — тавтология и $C_1, \ldots, C_n$ — любые формулы, то формула $A(C_1, \ldots, C_n)$ есть аксиома.

Правила вывода: (MP) $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$

$\dfrac{A \to B}{A \to (\forall x B[a/x])}$, где a не входит в A, а x не входит в B

$\dfrac{A \to B}{(\exists x A[a/x]) \to B}$, где a не входит в B, а x не входит в A