Майнор логика, 2017. Семинар 5.

Определения. Всюду ниже рассматриваются подмножества $\mathbb{N}^n$ и вычислимые функции $\mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^k$. Фиксируем некоторую вычислимую нумерацию всех машин Тьюринга. Обозначаем через $\varphi_n(x)$ значение вычислимой функции $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ с номером n на входе x (если таковое определено).

1. Докажите, что пересечение, объединение и разность любых разрешимых множеств разрешимы.

2. Докажите, что пересечение и объединение перечислимых множеств перечислимы.

3. (домашняя работа) Докажите, что если множество A разрешимо и f — тотальная вычислимая функция, то множество $\{y : \exists x \in A\ f(x) = y\}$ перечислимо, а множество $\{x : \exists y \in A\ f(x) = y\}$ разрешимо.

4. Докажите, что если множество $A \subseteq \mathbb{N}^2$ разрешимо, то $\{x : \exists y\, (x, y) \in A\}$ перечислимо.

5. Докажите, что существует вычислимое взаимно-однозначное отображение множества $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$.

6. Докажите, что функция $f(n) := \varphi_n(n) + 1$ является вычислимой, но не имеет тотального вычислимого продолжения. То есть, не существует тотальной вычислимой функции g, для которой $f(n) = g(n)$ при всех n, для которых $f(n)$ определено.

7. Докажите, что множества $A = \{n : \varphi_n(n) = 0\}$ и $B = \{n : \varphi_n(n) = 1\}$ перечислимы, но не отделимы никаким разрешимым множеством C. То есть, $A \cap B = \emptyset$ и не существует разрешимого C, для которого $A \subseteq C$ и $B \subseteq \mathbb{N} \setminus C$.

8. Найдите из предыдущей задачи пример перечислимого неразрешимого множества.

9. Приведите пример неперечислимого множества. Приведите пример невычислимой тотальной функции.

10. Рассмотрим функцию B такую, что $B(n)$ равно самой длинной последовательности единиц, которую может напечатать (остановившись) машина Тьюринга с не более, чем n состояниями. Докажите, что B невычислима.