

Задачи для семинара 4.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Запишите в виде десятичной дроби обыкновенную дробь $\frac{5}{7}$.

(б) Запишите в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную дробь $1.3(12)$.

Задача 2. Выпишите разложение в цепную дробь чисел

$$(a) \frac{100}{37}; \quad (б) \frac{34}{21}; \quad (в) \frac{1000001}{1000}.$$

Задача 3. Найдите наилучшее рациональное приближение числа π среди всех обыкновенных дробей со знаменателем, не превосходящим 10.

Задача 4. Найдите разложение в цепную дробь чисел

$$(a) \sqrt{3}; \quad (б) \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad (в) \sqrt{7}.$$

Задача 5. (а) На плоскости в начале координат сидит охотник, а во всех остальных точках с целыми координатами сидят круглые зайцы радиуса $\frac{1}{100}$. Докажите, что независимо от меткости и направления выстрела охотник всегда попадёт в какого-нибудь зайца (предполагается, что пуля летит по прямой сколь угодно долго, если только не попадёт в зайца).

(б) Собака охотника может принести хозяину подстреленного зайца, только если расстояние между зайцем и охотником было не больше R . При каких значениях R охотник рискует остаться без добычи?

Задача 6. Докажите, что куб целого числа может начинаться с цифр 20162016.

Задача 7. (а) Докажите, что для любых натуральных чисел p и q выполнено неравенство

$$|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| > \frac{1}{5q^2}.$$

Иными словами, $\sqrt{2}$ не слишком хорошо приближается рациональными числами.

(б) Докажите, что для любого вещественного числа α найдутся такие целые числа $p \neq 0$ и q , что

$$|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$$

Задача 8. Решите в целых числах уравнение Пелля

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$