

## Программа учебной дисциплины «Практическая линейная алгебра»

Утверждена  
Проректором С.Ю.Рощиным  
« » 2019 г.

Автор	Д.И.Пионтковский, доктор физико-математических наук
Число кредитов	3
Контактная работа (час.)	56
Самостоятельная работа (час.)	58
Курс	2-4
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

### I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Линейная алгебра является одной из базовых математических дисциплин. Несмотря на её фундаментальный характер, у нее есть достаточно много «прямых», но вполне эффективных приложений. Курс посвящен знакомству с такими приложениями и методами, которые, при всей своей элементарности, обычно находятся за пределами стандартных курсов бакалавриата. Другой основной целью курса является формирование и развитие навыков применения методов линейной алгебры к задачам, возникающим в других областях науки, бизнеса и, особенно, анализа данных.

Этот курс может быть полезен и студентам уже специализировавшимся в изучении прикладной математики, так и студентам факультетов социальных и экономических наук, желающим лучше понять и глубже освоить методы линейной алгебры, применяющиеся при анализе данных. Особенно полезен он будет для студентов естественно-научных факультетов.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные утверждения и теоремы курса;
- Уметь решать задачи линейной алгебры, перечисленные в программе курса;
- Иметь навыки построения приближений, аппроксимаций и приближенного решения линейных систем.

Изучение дисциплины «Практическая линейная алгебра» базируется на одной из следующих дисциплин: «Линейная алгебра», «Линейная алгебра и геометрия» или «Высшая математика». Курс будет особенно легко восприниматься студентами, которые дополнительно изучали одну или несколько из следующих дисциплин: «Математический анализ», «Программирование», «Математическая статистика».

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- базовые концепции и методы линейной алгебры;
- умения и навыки решения задач по линейной алгебре.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- 1 Анализ данных,
- 2 Машинное обучение,
- 3 Численные методы,
- 4 Функциональный анализ.

## **II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### ***Тема I. Псевдообратная матрица и метод наименьших квадратов***

Псевдообратная матрица (обратная Мура--Пенроуза), ее определения, основные свойства и способы вычисления. Основы метода наименьших квадратов, решение линейной задачи на метод наименьших квадратов с помощью псевдообратной матрицы. Понятие о линейной регрессии, примеры решения практических задач.

Разложение полного ранга и SVD. Использование этих разложений для построения псевдообратной матрицы.

### ***Тема II. Знакомство с метриками и нормами***

Метрики в нормированных пространствах. Открытые и замкнутые множества в метрических пространствах, окрестности, связь с понятием предела. Эквивалентность норм и эквивалентность топологий. Теорема об эквивалентности норм в конечномерных пространствах.

### ***Тема III. Аппроксимация и многочлены Чебышева***

Примеры норм и метрик в пространствах функций, связь с задачами аппроксимации.

Многочлены Чебышева как наименее уклоняющиеся от нуля, их графики. Ортогональность, разложение многочленов по базису из многочленов Чебышева.

### ***Тема V. Функции от матриц***

Функции от матриц (определение через спектр). Многочлены от матриц, минимальный многочлен матрицы. Многочлен Лагранжа. Матричные ряды. Представление элементарных функций рядами Тейлора. Вычисление матричных функций и оценка остаточного члена через спектральный радиус.

### ***Тема VI. Элементы теории возмущений***

Оценки собственных значений, теоремы Гершгорина. Число обусловленности матрицы. Связь с обусловленностью систем линейных уравнений. Примеры приближенного решения систем линейных уравнений.

\*Методы решения больших систем линейных уравнений: обзор и примеры.

### ***Тема VII. Линейная алгебра и задачи оптимизации***

Задача линейного программирования. Примеры. Связь прямой и двойственной задачи.

\*Методы решения задачи линейного программирования, симплекс-метод.

Итерационные методы решения систем линейных уравнений.

\*Тропическая алгебра. Тропические системы уравнений, линейная алгебра над тропическим полукольцом. Приложения к теории расписаний и изучению блужданий на графах.

\*Численные методы решения минимизации среднеквадратичного отклонения с линейными ограничениями.

\*Задача квадратичного программирования и алгоритмы ее решения.

\*Задача выпуклого программирования и методы ее решения.

### **III. ОЦЕНИВАНИЕ**

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде контрольной работы. Итоговый контроль осуществляется в виде зачетной контрольной работы. Итоговая оценка  $O_{\text{итог}}$  по 10-балльной шкале формируется как взвешенная сумма  $O_{\text{итог}} = 0,5 * O_{\text{к.р.}} + 0,5 * O_{\text{зач.}}$ , округленная до целого числа баллов.  $O_{\text{к.р.}}$  и  $O_{\text{зач.}}$  обозначают оценки по 10-балльной шкале за контрольную работу и зачет соответственно. Способ округления результирующей оценки по учебной дисциплине арифметический.

Кроме того, предусмотрена возможность автоматического получения студентом зачета. Для его получения студент должен написать промежуточную контрольную не ниже чем на оценку 8 и самостоятельно проработать и сделать доклад по одной из тем, помеченных звездочкой в программе курса. Оценка за доклад при этом учитывается как  $O_{\text{зач.}}$  в приведенной выше формуле.

На пересдаче студенту предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

На зачете студент может получить дополнительный вопрос (дополнительную практическую задачу, решить к пересдаче домашнее задание), ответ на который оценивается в 1 балл.

В диплом выставляется результирующая оценка по учебной дисциплине.

### **IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

#### **Типовой вариант контрольной работы**

1. Воспользовавшись формулой Лагранжа, запишите многочлен степени не выше третьей, для которого  $f(-4) = -53, f(-2) = -9, f(2) = 31, f(1) = 12$ .
2. Найдите какое-нибудь разложение полного ранга и псевдообратную матрицу для

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & -7 \\ 12 & 9 & 0 \\ -6 & -3 & 5 \\ 16 & 12 & -14 \end{pmatrix}.$$

3. Среди всех приближений решения следующей системы по методу наименьших

квадратов найдите вектор наименьшей длины. 
$$\begin{cases} -3y - 3z = 0 \\ 8x + 5y - z - 4t = 5 \\ -3x - 3y + z + t = -1 \\ 16x + 4y - 8z - 4t = 11 \end{cases}$$

4. Для многочлена  $x^3 - 2x^2 + x + 1$  найдите наилучшее равномерное приближение многочленом второй степени на отрезке  $[1, 3]$ .

5. Для функции  $\cos(x) + x^2 + x + 1$  найдите приближение многочленом степени не выше второй, наилучшее относительно нормы, заданной скалярным произведением  $\langle g(x), f(x) \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x)f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ .

6. Найдите сингулярное разложение для матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите значение  $f(A)$  функции  $f(l) = \ln(l + 2)$ , где  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

8. Постройте такую матричную норму на пространстве матриц второго порядка, что последовательность  $A^n$  норм матриц сходится, где  $\begin{pmatrix} -0.85 & -1 \\ 0 & 0.85 \end{pmatrix}$  или докажите, что такой нормы не существует.

9. При каком  $q$  уравнение  $18x^2 + 24xz + 4y^2q^2 - 16y^2 + 9qy^2 + 12yqz + 4qz^2 + 8z^2 = 1$  задает единичную сферу относительно какой-то нормы? Найдите норму вектора  $(1,1,1)$  в зависимости от  $q$ .

10. Решить приближенно систему и оценить погрешности решения в нормах

$$|\cdot|_1, |\cdot|_2, |\cdot|_\infty :$$

$$\begin{cases} 2(1 + \varepsilon_1)x + (3 + \varepsilon_2)y = 5 + \varepsilon_3 \\ -3x + (2 + \varepsilon_1)y = -1 + \varepsilon_4 \end{cases}$$

где неизвестные числа  $\varepsilon_j$  удовлетворяют условиям  $|\varepsilon_j| < 0.05$  для всех  $j = 1, \dots, 4$ .

11. Существуют ли несимметричные матрицы, для которых  $\kappa_2(A^2) = (\kappa_2(A))^2$  ?

## V. РЕСУРСЫ

### Основная литература

[Б] Беклемишев Д.В., Дополнительные главы линейной алгебры, СПб, изд. Лань, 2008

[Ш] Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2003 (или другой год издания). 576 с.

[В] Винберг Э.Б., Курс алгебры, М., изд. МГУ, 2002 (и последующие издания)

[БЖК] Бахвалов Н., Жидков Н., Кобельков Н., Численные методы, М., изд. Бином, 2003 (или другой год издания).

[КФ] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, М., изд. Наука, 1976 (или другой год издания).

### **Дополнительная литература**

[AEP] Aleskerov F., Ersel H., Piontkovski D., Linear Algebra for Economists. Berlin—Heidelberg, Springer, 2011

[But] P. Butkovic. Max-Linear Systems: Theory and Algorithms. Springer, 2010 (или другой год издания)

### **5.1 Программное обеспечение**

Выбор программных средств для реализации алгоритмов осуществляется студентом.

В домашних заданиях для рутинных алгебраических вычислений возможно использование систем Maple или Matlab (доступ из компьютерных классов ВШЭ по договору), а также специализированных (и свободно распространяемых) библиотек для языков программирования C++ и Python.

### **5.2 Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)**

<b>№ п/п</b>	<b>Наименование</b>	<b>Условия доступа/скачивания</b>
<b>Интернет-ресурсы</b>		
1	Demonstrations Project, Image Compression via the Singular Value Decomposition:	<a href="http://demonstrations.wolfram.com/ImageCompressionViaTheSingularValueDecomposition/">http://demonstrations.wolfram.com/ImageCompressionViaTheSingularValueDecomposition/</a>
2	Литература издательства Springer	<a href="http://link.springer.com">http://link.springer.com</a>

### **5.3 Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Для проведения лекций и семинаров по дисциплине необходимо наличие ноутбука (компьютера) и мультимедийного проектора.