АННОТАЦИЯ

к программе общеуниверситетского факультатива
«***Математические методы исследования периодических процессов***»

А.В. Романов

Периодические (колебательные, повторяющиеся во времени) процессы наблюдаются в различных явлениях природы и сферах человеческой деятельности. Это, например: механические вращательные движения, в частности, движение планет и искусственных спутников; периодические реакции в химии и биохимии; периодические колебания численности конкурирующих видов в биологии; Кондратьевские циклы в экономике, и т.д. Понимание подобных процессов является составной частью адекватного взгляда на мир.

Объектом изучения в данном курсе являются динамические системы. Под динамической системой в широком смысле слова понимается описание исследуемого объекта с помощью математического закона, позволяющего однозначно определить его состояние в момент времени $t > 0$ по заданному состоянию в начальный момент времени $t = 0$. Теория динамических систем представляет собой одну из бурно развивающихся и востребованной в приложениях ветвей современной теоретической и прикладной математики.

Основной целью изучения конкретной динамической системы является описание установившихся режимов, т.е. поведения системы при большом времени. Наиболее простые типы таких режимов это стационарные (не изменяющиеся во времени) состояния и периодически повторяющиеся процессы. Именно такие процессы будут главным объектом внимания в данном курсе. В то же время, предполагается затронуть и более сложные типы динамики, в частности, так называемые странные (хаотические) аттракторы. Подобные установившиеся режимы возникают в системах с неустойчивой относительно начальных состояний динамикой, их изучение важно для понимания, например, явления турбулентности в гидродинамике и газодинамике.

Мы будем рассматривать динамические системы с непрерывным и дискретным временем. В первом случае отслеживают состояние системы в произвольные моменты времени, во втором – в моменты времени $t = \tau, 2\tau, 3\tau, ..., k\tau, ...$ с заданным шагом $\tau > 0$.

В свою очередь, непрерывные динамические системы делятся на конечномерные и распределённые. Множество состояний (фазовое пространство) конечномерной динамической системы, обычно, представляет собой область в $\mathbb{R}^n$. Такие динамические системы могут задаваться, например, системой n нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которую можно интерпретировать как одно уравнение с векторным аргументом

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x = x(t), \quad x(0) = x_0,$$

где $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$ и отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет определённым условиям регулярности. В этом случае говорят о динамической системе с *конечным числом степеней свободы*. Состояния распределённой динамической системы – это определённого класса функции (числовые или векторные) заданные в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^m$, $1 \le m \le 3$. Такие динамические системы задаются нелинейными уравнениями в частных производных и представляют собой динамические системы с *бесконечным числом степеней свободы*. В этой связи будут рассмотрены системы из n уравнений реакции–диффузии вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(u), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in D,$$

с $u = (u_1, u_2, ..., u_n) = u(x,t)$, оператором Лапласа Δ и достаточно регулярным отображением $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Подобные уравнения описывают протекание химических процессов при наложении эффекта диффузии.

В дискретной динамической системе состояния x представляют собой точки некоторого метрического компакта (фазового пространства) K и переход от момента времени $k\tau$ к моменту $(k+1)\tau$ задаётся формулой $x_{k+1} = \varphi(x_k)$ с заданной непрерывной функцией $\varphi : K \to K$.

При изучении периодических режимов, обычно, ставят три основные задачи: 1) установить существование такого режима и, хотя бы приближённо, локализовать его в фазовом пространстве; 2) исследовать устойчивость режима по отношению к тем или иным возмущениям; 3) вычислить (или оценить) величину периода соответствующего колебания. Программа курса предполагает изложение методов решения указанных задач. В частности, будет представлена (относительно новая) теория инерциальных многообразий, позволяющая сводить при большом времени изучение непрерывной динамической системы к системе с *меньшим* (*всегда конечным*) *числом степеней свободы*.

Все теоретические построения будут проиллюстрированы многочисленными примерами из разных областей естествознания, экономики и социологии.