

Программа учебной дисциплины «Линейная алгебра в приложениях»

Утверждена
Проректором С.Ю.Рощиным
«25» июня 2017 г.

Автор	Д.И.Пионтковский, доктор физико-математических наук, В.Л.Чернышев, кандидат физико-математических наук
Число кредитов	3
Контактная работа (час.)	72
Самостоятельная работа (час.)	42
Курс	1
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

I. ЦЕЛЬ, РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И ПРЕРЕКВИЗИТЫ

Линейная алгебра является одной из базовых математических дисциплин. Несмотря на её фундаментальный характер, у нее есть достаточно много «прямых», но вполне эффективных приложений. Наш курс посвящен знакомству магистрантов с такими приложениями и методами, которые, при всей своей элементарности, обычно находятся за пределами стандартных курсов бакалавриата.

Этот курс может быть полезен и студентам уже специализировавшимся в изучении прикладной математики, так и студентам факультетов социальных и экономических наук, желающим лучше понять и глубже освоить методы линейной алгебры, применяющиеся при анализе данных.

В результате освоения дисциплины студент должен:

- Знать основные утверждения и теоремы курса;
- Уметь решать задачи линейной алгебры, перечисленные в программе курса;
- Иметь навыки построения приближений, аппроксимаций и приближенного решения линейных систем.

Изучение дисциплины «**Линейная алгебра в приложениях**» базируется на одной из следующих дисциплин: «Линейная алгебра», «Линейная алгебра и геометрия» или «Высшая математика». Курс будет особенно легко восприниматься студентами, которые изучали одну или несколько из следующих дисциплин: «Математический анализ», «Программирование», «Математическая статистика».

Для освоения учебной дисциплины студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- базовые концепции и методы линейной алгебры;
- умения и навыки решения задач по линейной алгебре.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- 1 Анализ данных,
- 2 Машинное обучение,
- 3 Численные методы,
- 4 Функциональный анализ.

II. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема I. Псевдообратная матрица и метод наименьших квадратов

Псевдообратная матрица, ее определения, основные свойства и способы вычисления. Основы метода наименьших квадратов, решение линейной задачи на метод наименьших квадратов с помощью псевдообратной матрицы. Понятие о линейной регрессии, примеры решения практических задач.

Тема II. Матричные разложения.

Матричные разложения и их приложения к обработке изображений и к машинному обучению. QR разложение и сингулярное (SVD) разложение.

Тема III. Метрики и нормы. Матричные нормы.

Метрики в нормированных пространствах. Матричные нормы, их связь с векторными нормами. Нормы Гельдера и Фробениуса. Спектральный радиус, связь с нормами.

Тема IV. Элементы теории возмущений.

Оценки собственных значений, теоремы Гершгорина. Число обусловленности матрицы. Связь с обусловленностью систем линейных уравнений. Примеры приближенного решения систем линейных уравнений.

*Методы решения больших систем линейных уравнений: обзор и примеры.

Тема V. Линейная алгебра и задачи оптимизации

Задача линейного программирования. Примеры. Связь прямой и двойственной задачи.

*Методы решения задачи линейного программирования, симплекс-метод.

Итерационные методы решения систем линейных уравнений. Их связь с задачей поиска в интернете.

*Численные методы решения минимизации среднеквадратичного отклонения с линейными ограничениями.

*Задача квадратичного программирования и алгоритмы ее решения.

*Задача выпуклого программирования и методы ее решения.

Тема VI. Линейные коды.

Линейные коды и коды, исправляющие ошибки.

Тема VII. Приложения и обобщения методов линейной алгебры

*Эффективные алгоритмы и параллельные вычисления в линейной алгебре.

*Тропическая алгебра. Тропические системы уравнений, линейная алгебра над тропическим полукольцом. Приложения к теории расписаний и изучению блужданий на графах.

*Алгебраические уравнения и символьные вычисления. Базисы Грёбнера. Алгоритмическая теория исключения для систем алгебраических уравнений и другие приложения.

III. ОЦЕНИВАНИЕ

Контроль знаний студентов включает формы текущего и итогового контроля. Текущий контроль осуществляется в виде контрольной работы. Итоговый контроль осуществляется в виде зачетной контрольной работы. Итоговая оценка $O_{\text{итог}}$ по 10-балльной шкале формируется как взвешенная сумма $O_{\text{итог}} = 0,5 * O_{\text{к.р.}} + 0,5 * O_{\text{зач}}$, округленная до целого числа баллов. $O_{\text{к.р.}}$ и $O_{\text{зач}}$ обозначают оценки по 10-балльной шкале за контрольную работу и зачет соответственно. Способ округления результирующей оценки по учебной дисциплине арифметический.

Кроме того, предусмотрена возможность автоматического получения студентом зачета. Для его получения студент должен написать промежуточную контрольную не ниже чем на оценку 8 и самостоятельно проработать и сделать доклад по одной из тем, помеченных звездочкой в программе курса. Оценка за доклад при этом учитывается как $O_{\text{зач}}$ в приведенной выше формуле.

На передаче студенту предоставляется возможность получить дополнительный балл для компенсации оценки за текущий контроль.

На зачете студент может получить дополнительный вопрос (дополнительную практическую задачу, решить к передаче домашнее задание), ответ на который оценивается в 1 балл.

В диплом выставляется результирующая оценка по учебной дисциплине.

IV. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Типовой вариант контрольной работы

1. Воспользовавшись формулой Лагранжа, запишите многочлен степени не выше третьей, для которого $f(-4) = -53, f(-2) = -9, f(2) = 31, f(1) = 12$.
2. Найдите какое-нибудь разложение полного ранга и псевдообратную матрицу для

$$\begin{pmatrix} -4 & -3 & -7 \\ 12 & 9 & 0 \\ -6 & -3 & 5 \\ 16 & 12 & -14 \end{pmatrix}.$$

3. Среди всех приближений решения следующей системы по методу наименьших

квадратов найдите вектор наименьшей длины.
$$\begin{cases} -3y - 3z = 0 \\ 8x + 5y - z - 4t = 5 \\ -3x - 3y + z + t = -1 \\ 16x + 4y - 8z - 4t = 11 \end{cases}$$

4. Для многочлена $x^3 - 2x^2 + x + 1$ найдите наилучшее равномерное приближение многочленом второй степени на отрезке $[1, 3]$.

5. Для функции $\cos(x) + x^2 + x + 1$ найдите приближение многочленом степени не выше второй, наилучшее относительно нормы, заданной скалярным произведением $\langle g(x), f(x) \rangle = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(x)f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. Найдите сингулярное разложение для матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найдите значение $f(A)$ функции $f(l) = \ln(l + 2)$, где $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Постройте такую матричную норму на пространстве матриц второго порядка, что последовательность A^n норм матриц сходится, где $\begin{pmatrix} -0.85 & -1 \\ 0 & 0.85 \end{pmatrix}$ или докажите, что такой нормы не существует.

9. При каком q уравнение $18x^2 + 24xz + 4y^2q^2 - 16y^2 + 9qy^2 + 12yqz + 4qz^2 + 8z^2 = 1$ задает единичную окружность относительно какой-то нормы? Найдите норму вектора $(1,1,1)$ в зависимости от q .

10. Решить приближенно систему и оценить погрешности решения в нормах

$|\cdot|_1, |\cdot|_2, |\cdot|_\infty$:

$$\begin{cases} 2(1 + \varepsilon_1)x + (3 + \varepsilon_2)y = 5 + \varepsilon_3 \\ -3x + (2 + \varepsilon_1)y = -1 + \varepsilon_4 \end{cases}$$

где неизвестные числа ε_j удовлетворяют условиям $|\varepsilon_j| < 0.05$ для всех $j = 1, \dots, 4$.

11. Существуют ли несимметричные матрицы, для которых $\kappa_2(A^2) = (\kappa_2(A))^2$?

V. РЕСУРСЫ

Основная литература

[Б] Беклемишев Д.В., Дополнительные главы линейной алгебры, СПб, изд. Лань, 2008

[Ш] Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2003 (или другой год издания). 576 с.

[В] Винберг Э.Б., Курс алгебры, М., изд. МГУ, 2002 (и последующие издания)

[БЖК] Бахвалов Н., Жидков Н., Кобельков Н., Численные методы, М., изд. Бинум, 2003 (или другой год издания).

[КФ] Колмогоров А.Н., Фомин С.В., Элементы теории функций и функционального анализа, М., изд. Наука, 1976 (или другой год издания).

Дополнительная литература

[АЕР] Aleskerov F., Ersel H., Piontkovski D., Linear Algebra for Economists. Berlin—Heidelberg, Springer, 2011

[But] P. Butkovic. Max-Linear Systems: Theory and Algorithms. Springer, 2010 (или другой год издания)

5.1 Программное обеспечение

Выбор программных средств для реализации алгоритмов осуществляется студентом.

В домашних заданиях для рутинных алгебраических вычислений возможно использование систем Maple или Matlab (доступ из компьютерных классов ВШЭ по договору), а также специализированных (и свободно распространяемых) библиотек для языков программирования C++ и Python.

5.2 Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

№ п/п	Наименование	Условия доступа/скачивания
	Интернет-ресурсы	
1	Demonstrations Project, Image Compression via the Singular Value Decomposition:	http://demonstrations.wolfram.com/ImageCompressionViaTheSingularValueDecomposition/
2	Литература издательства Springer	http://link.springer.com

5.3 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Для проведения лекций и семинаров по дисциплине необходимо наличие ноутбука (компьютера) и мультимедийного проектора.