

Задачи для семинара 2.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите и докажите явную формулу для суммы геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

Задача 2. Докажите следующие тождества

(а) $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$; (б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$.

Задача 3. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

- (1) заменять первую цифру (ноль на единицу и наоборот);
- (2) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

(Пример: в последовательности 0011001... можно заменить первую цифру или четвёртую — они подчёркнуты.) Показать, что с помощью нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из ста нулей и единиц.

Задача 4. На доске в ряд записан набор чисел. Изначально это два числа (1, 1). Вписываем между каждыми двумя соседними числами их сумму и получим новый набор. С ним поступим так же. Какова будет сумма всех чисел в наборе после ста таких операций?

Задача 5. Рассмотрим всевозможные обыкновенные дроби с числителем 1 и любым натуральным знаменателем. Докажите, что для любого $n \geq 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей такого вида. Пример при $n = 3$:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

Задача 6. Пусть число $x + \frac{1}{x}$ целое. Покажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ тоже целое при любом натуральном n .

Задача 7. (а) Докажите, что для любого натурального n выполнено неравенство

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

(б) Докажите, что для любого натурального k найдётся такое натуральное n , что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq k.$$

(в) Существует ли такая последовательность вещественных чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, что

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq 1, \text{ но при этом } a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3 \geq 1000000?$$

Задача 8. На какое максимальное число частей могут делить плоскость n окружностей?