

**Задачи для семинара 1**

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

**Определение 1.** Пусть  $a$  и  $b$  — целые числа, и  $b \neq 0$ . Поделить  $a$  на  $b$  с остатком означает найти такие целые числа  $q$  и  $r$ , что

- (1)  $0 \leq r < |b|$ ;
- (2)  $a = bq + r$ .

**Задача 1.** Поделите  $a$  на  $b$  с остатком

- (а) 1024 на 27;    (б)  $-25$  на 4.

**Задача 2.** Запишите в троичной системе счисления числа (а) 999;    (б) 998.

**Задача 3.** Составьте таблицы сложения и умножения для системы счисления с основанием 5.

**Определение 2.** *Поле из двух элементов* называется множество из двух элементов (обозначаемых 0 и 1) с операциями сложения и умножения, заданными следующими таблицами:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

**Задача 4.** Проверьте ассоциативность и дистрибутивность сложения и умножения в поле из двух элементов. Проверьте, что из каждого элемента можно вычесть любой другой элемент, и каждый элемент можно поделить на любой другой ненулевой элемент.

**Определение 3.** Обозначим через  $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$  число записанное цифрами  $a_1, a_2, \dots, a_n$  в десятичной системе счисления, то есть

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_n} = a_1 10^{n-1} + a_2 10^{n-2} + \dots + a_n.$$

**Задача 5.** Докажите следующие признаки делимости на 3, 9 и 11.

(а) Число  $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$  делится на 3 тогда и только тогда, когда его сумма цифр  $a_1 + \dots + a_n$  делится на 3.

(б) Число  $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$  делится на 9 тогда и только тогда, когда его сумма цифр  $a_1 + \dots + a_n$  делится на 9.

(в) Число  $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$  делится на 11 тогда и только тогда, когда его знакопеременная сумма цифр  $a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n$  делится на 11.

(г) Придумайте и докажите признак делимости на 3 в двоичной системе счисления.

**Задача 6.** Докажите, что число  $\underbrace{11 \dots 1}_{2019}$  делится на 37.

**Задача 7.** На одной из прямых в конечной проективной плоскости лежит ровно  $p$  точек. Сколько всего точек и прямых в этой плоскости?