

Задачи для семинара 5.

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Найдите разложение в цепную дробь чисел

$$(a) \sqrt{3}; \quad (б) \frac{1 + \sqrt{5}}{2}; \quad (в) \sqrt{7}.$$

Задача 2. Докажите, что если цепная дробь некоторого числа периодична, начиная с некоторого места, то это число является решением квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

Задача 3. (а) На плоскости в начале координат сидит охотник, а во всех остальных точках с целыми координатами сидят круглые зайцы радиуса $\frac{1}{100}$. Докажите, что независимо от меткости и направления выстрела охотник всегда попадёт в какого-нибудь зайца (предполагается, что пуля летит по прямой сколь угодно долго, если только не попадёт в зайца).

(б) Собака охотника может принести хозяину подстреленного зайца, только если расстояние между зайцем и охотником было не больше R . Укажите какое-нибудь R , при котором собака гарантированно сможет принести подстреленного зайца.

Задача 4. Докажите, что десятичная запись степени двойки (то есть числа вида 2^n) может начинаться с любого наперед заданного конечного набора цифр.

Задача 5. (а) Докажите, что для любых натуральных чисел p и q выполнено неравенство

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{5q^2}.$$

Иными словами, $\sqrt{2}$ не слишком хорошо приближается рациональными числами.

(б) Докажите, что для любого иррационального числа α найдутся такие целые числа $p \neq 0$ и q , что

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

Задача 6. Решите в целых числах уравнение Пелля

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$