Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2019 г.

Задачи для семинара 4.

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Многочлен $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ (с коэффициентами $a_0, \ldots, a_n$, лежащими в некотором кольце) называется *неприводимым*, если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов меньшей степени (с коэффициентами в том же кольце). Конечно или бесконечно множество неприводимых многочленов с $a_n = 1$ и остальными коэффициентами в (а) кольце $\mathbb{Z}$; (б) поле $\mathbb{R}$; (в) поле $\mathbb{F}_2$?

Задача 2. Докажите, что ни одно из чисел вида 10^{3n+1} нельзя представить в виде суммы двух кубов натуральных чисел.

Задача 3. (а) Докажите малую теорему Ферма: если p — простое число, то $n^p - n$ делится на p для любого натурального n.

(б) Будет ли простым число $257^{1092} + 1092$?

Задача 4. (а) Рассмотрим множество $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ остатков $[0]$, $[1]$, $[2]$, $[3]$, $[4]$ при делении на 5. Введём на $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ операции сложения и умножения с помощью следующих правил:

$$[a] + [b] = [a + b],$$

$$[a] \cdot [b] = [ab],$$

где сложение и умножение в правой части совпадают со сложением и умножением в $\mathbb{Z}$. Какие из аксиом поля выполняются для этих операций?

(б) Тот же вопрос для $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Задача 5. Рассмотрим множество $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ всех упорядоченных пар $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, где 0 и 1 — это элементы поля $\mathbb{F}_2$ из двух элементов.

(а) Введём на $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ операции сложения и умножения с помощью следующих правил:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd),$$

где сложение и умножение в правой части совпадают со сложением и умножением в $\mathbb{F}_2$. Какие из аксиом поля выполняются для этих операций?

(б) Тот же вопрос для операций

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc + bd).$$

Задача 6. Докажите, что многочлен $x^n - p$ неприводим (как многочлен с целыми коэффициентами) для любого простого p.

Задача 7. Докажите, что простых чисел вида $4k + 3$, где k — целое, бесконечно много. Докажите то же для чисел вида $4k + 1$.