Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2019 г.

Задачи для семинара 6

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. (а) Убедитесь, что корни степени n из единицы образуют группу по умножению.
(б) Корень степени n из единицы называется *первообразным*, если он не является корнем из единицы степени $m < n$. Докажите, что корень $u_k = e^{\frac{2\pi k i}{n}}$, $k = 0, \ldots, n-1$, является первообразным тогда и только тогда, когда k взаимно просто с n.

Задача 2. Объявим два многочлена из $\mathbb{R}[x]$ эквивалентными, если их разность делится на x^2+1, и определим сложение и умножение на классах эквивалентности естественным образом: $[a]+[b]=[a+b]$, $[a]\cdot[b]=[a\cdot b]$. Постройте согласованную с операциями биекцию между этим фактормножеством и множеством комплексных чисел.

Задача 3. Нарисуйте на плоскости множество точек z, удовлетворяющих уравнению

$$|z-1| = 2|z+1|.$$

Задача 4. (а) Можно ли ввести на комплексных числах отношение линейного порядка $>$, согласованное со сложением и умножением? (Последнее означает, что для всех $a, b, c \in \mathbb{C}$

(i) из $a > b$ следует $a + c > b + c$; (ii) из $a > 0$ и $b > 0$ следует, что $ab > 0$.)

(б) Можно ли на $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ввести нетривиальное отношение частичного порядка, согласованное со сложением? (Тривиальное — это такое, при котором разные элементы несравнимы.)

Задача 5. (а) Докажите, что угол между прямыми, пересекающимися в точке z_0 и проходящими через точки z_1 и z_2, равен аргументу отношения $V(z_2, z_1, z_0) = \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}$.

(б) Докажите, что четыре точки z_0, z_1, z_2 и z_3 лежат на одной окружности (или прямой) тогда и только когда их *двойное отношение*

$$\frac{V(z_0, z_1, z_2)}{V(z_0, z_1, z_3)} = \frac{(z_0 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_2)(z_0 - z_3)}$$

является вещественным числом.

Задача 6. (а) На комплексной прямой в точках $z_1, \ldots, z_n$ находятся n планет одинаковой массы. Сила тяготения убывает пропорционально расстоянию (а не его квадрату, как в трехмерном случае). Докажите, что точки z, в которых силы тяготения этих планет уравновешиваются, являются корнями уравнения $\frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \ldots + \frac{1}{z-z_n} = 0$.

(б) (Проблема Максвелла) Доказать, что у системы планет из пункта (а) не более $n-1$ точки равновесия, причем оценка $n-1$ точная.

(в) (Теорема Гаусса–Лукаса) Корни производной комплексного многочлена $f(z) = (z-z_1)\ldots(z-z_n)$ лежат в выпуклой оболочке $z_1, \ldots, z_n$.

Задача 7. (а) Определим *кватернионы* $\mathbb{H}$ как алгебру линейных операторов на плоскости $\mathbb{C}^2$, заданных матрицами вида

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}.$$

Докажите, что в $\mathbb{H}$ выполняются все аксиомы поля, кроме коммутативности умножения.