Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2019 г.

Задачи для подготовки к контрольной

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке проезжает 50 км. Имеется бесконечный запас пустых канистр, в которые можно сливать бензин из бака машины, чтобы оставлять его на хранение в любой точке пустыни. Канистры с бензином внутри машины перевозить запрещено. Докажите, что машина может проехать по пустыне любое расстояние.

Задача 2. Плоскость разрезана на части $n \geq 3$ прямыми, причем среди прямых нет параллельных и не все прямые проходят через одну точку. Докажите, что хотя бы одна из частей — треугольник.

Задача 3. Докажите для всех натуральных n, что произведение любых n последовательных натуральных чисел делится на $n!$.

Задача 4. Может ли число вида $2019 \cdot k + 512$, где $k \in \mathbb{N}$, быть квадратом натурального числа?

Задача 5. Докажите, что если число $2^n - 1$ простое, то n обязательно является простым числом.

Задача 6. Докажите, что в каждом кольце (ассоциативном, коммутативном и с единицей) выполняются тождества:

$$1)\ -a = (-1) \cdot a; \quad 2)\ a \cdot 0 = 0; \quad 3)\ (-a) \cdot b = (-ab).$$

Доказательство должно опираться только на аксиомы кольца.

Задача 7. Пусть в поле $\mathbb{F}$ тождество $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = 0$ не выполнено ни для какого натурального n. Докажите или опровергните: уравнение

$$\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n} = a$$

будет иметь единственное решение в поле $\mathbb{F}$ для любого элемента a из поля и любого натурального n.

Задача 8. Введём на упорядоченных парах целых чисел (m, n) такое отношение эквивалентности:

$$(m, n) \sim (k, l) \text{ тогда и только тогда, когда } (m + n - k - l) \text{ чётно}.$$

(а) Проверьте, что это действительно отношение эквивалентности, то есть оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

(б) На клетчатой бумаге нарисуйте все такие точки с координатами (m, n), что (m, n) и $(0, 0)$ лежат в одном и том же классе эквивалентности, и при этом $0 \leq m, n \leq 10$.

(в) Найдите число классов эквивалентности.

Задача 9. Рассмотрим отношение на точках плоскости, которое определяется следующим образом: $(x, y) \preceq (\hat{x}, \hat{y})$, если выполняется хотя бы одно из неравенств $x \leq \hat{x}$ и $y \leq \hat{y}$. Является ли это отношение отношением нестрогого частичного порядка?

Задача 10. Найдите разложение числа $\sqrt{13}$ в цепную дробь.

Задача 11. Даны точки на плоскости, соответствующие комплексным числам $0, 1, z, w \neq 0$. Постройте циркулем и линейкой $zw, z/w$ и $\sqrt{z}$.

Задача 12. Постройте циркулем и линейкой биссектрису угла, вершина которого закрыта кляксой.

Задача 13. Дана точка на стороне треугольника. С помощью циркуля и линейки постройте прямую, проходящую через точку и делящую треугольник на две фигуры равной площади.

Задача 14. Докажите, что куб натурального числа может начинаться с цифр 2019. (Подсказка: похожая задача разбиралась на семинаре.)

Задача 15. Существуют ли такие иррациональные $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, что α^β рационально?

Также рекомендуется снова пройтись по задачам из тестов онлайн-курса.