Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2019 г.

Задачи для семинара 9

факультет математики, НИУ ВШЭ

Задача 1. Докажите, что треугольник в $\mathbb{R}^4$ с вершинами $A = (4, 7, -3, 5)$, $B = (3, 0, -3, 1)$ и $C = (-1, 7, -3, 0)$ равнобедренный и вычислите длину его основания.

Задача 2. Докажите, что координаты точки пересечения медиан треугольника в $\mathbb{R}^2$ есть средние арифметические соответствующих координат вершин треугольника.

Задача 3. На координатной плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ дана точка A с координатами (x_0, y_0). Найдите координаты точки, в которую A перейдёт при

(а) параллельном переносе на вектор (a, b);

(б) отражении относительно прямой, заданной уравнением $y = kx$;

(в) повороте на угол φ относительно начала координат.

Задача 4. (а) Плоская фигура имеет две перпендикулярные оси симметрии. Верно ли, что она имеет центр симметрии?

(б) Существует ли плоская фигура, имеющая две оси симметрии, но не имеющая центра симметрии?

Задача 5. Будем рассматривать трёхмерное пространство $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ как часть четырёхмерного пространства $\mathbb{R}^4 = \{(x, y, z, w) \mid x, y, z, w \in \mathbb{R}\}$, состоящую из точек с координатами $(x, y, z, 0)$.

(а) Как нужно повернуть этот листок в $\mathbb{R}^4$, чтобы шрифт изменился на зеркальный?

(б) Докажите, что левый ботинок из $\mathbb{R}^3$ можно так повернуть в $\mathbb{R}^4$, что после возвращения в $\mathbb{R}^3$ он станет правым ботинком.

Задача 6. Одинаковые шары в $\mathbb{R}^4$ расположены так, что их центры являются вершинами 4-мерного куба, причём сторона куба равна диаметру шара. Докажите, что между этими шарами можно разместить ещё один шар того же размера, так что он будет касаться всех остальных шаров.

Задача 7. Докажите, что у 100-мерного апельсина радиусом 6см с толщиной кожуры 3мм съедобная часть составляет меньше одного процента объема.

Задача 8. * Докажите, что в $\mathbb{R}^4$ для любого $n > 4$ найдется выпуклый многогранник с n вершинами, каждые две вершины которого соединены ребром.