

Задачи для семинара 8

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ, НИУ ВШЭ

Задача 1. Пусть a, b — два вектора на плоскости. Докажите, что $\|a - b\| \geq \|a\| - \|b\|$.

Задача 2. В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырёхугольника получились числа 3, 5, 7, 11, 17. Чему равна длина измеренной диагонали?

Задача 3. (а) Докажите, что три средние линии разбивают треугольник на четыре равных треугольника.

(б) Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

Задача 4. Докажите, что если в треугольнике равны

(а) две высоты; (б) две медианы,
то треугольник равнобедренный.

Задача 5. Внутри равностороннего треугольника выбрана точка T . Докажите, что сумма расстояний от точки T до сторон треугольника не зависит от выбора точки.

Задача 6 (Задача Фаньяно). Впишите в данный остроугольный треугольник ABC треугольник Δ наименьшего периметра, так чтобы на каждой стороне треугольника ABC лежала ровно одна вершина треугольника Δ .

Задача 7 (Точка Торричелли). На плоскости даны три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой. Для какой точки T плоскости сумма расстояний $AT + BT + CT$ наименьшая?

Задача 8. Фермер хочет огородить прямоугольный загон, так чтобы его площадь была равна 400 м^2 . Найдите минимальный возможный периметр загона.

Задача 9. На плоскости дано n красных и n синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков с разноцветными концами, не имеющих общих точек.

Задача 10. Можно ли раскрасить все точки квадрата и круга в чёрный и белый цвета так, чтобы множества белых точек этих фигур были подобны друг другу и множества чёрных точек также были подобны друг другу (возможно, с различными коэффициентами подобия)?

Задача 11 (Теорема Штейнера–Лемуса). Докажите, что если в треугольнике равны две биссектрисы, то треугольник равнобедренный.