Основания алгебры и геометрии, осенний семестр 2019 г.

Задачи для семинара 11

факультет математики, НИУ ВШЭ

Определим множество кватернионов как $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{C} \right\} \subset M_2(\mathbb{C})$, где $M_2(\mathbb{C})$ — алгебра 2×2–матриц с элементами из $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ матрицы

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 1. Матрицы $\mathbf{1}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ образуют базис $\mathbb{H}$ как векторного пространства над $\mathbb{R}$.

Задача 2. (a) Проверьте справедливость следующей таблицы умножения (элемент первого столбца умножается слева на элемент первой строки):

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

(b) Докажите, что $\mathbb{H}$ является алгеброй над $\mathbb{R}$.

Задача 3. Докажите, что среди матриц из $\mathbb{H}$ только скалярные матрицы (т.е. матрицы вида $t \cdot \mathbf{1}, \ t \in \mathbb{R}$) коммутируют со всеми $q \in \mathbb{H}$.

Кватернион $q^* = x_0\mathbf{1} - x_1\boldsymbol{i} - x_2\boldsymbol{j} - x_3\boldsymbol{k}$ называется *сопряженным* к $q = x_0\mathbf{1} + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$. Если $x_0 = 0$, кватернион q называется *чисто мнимым*. Можно задать на $\mathbb{H}$ скалярное произведение, унаследованное из $\mathbb{R}^4$, и соответствующую ему норму $|q| = \sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

Задача 4. Проверьте, что (a) $|q|^2 = \det q$, (b) $qq^* = |q|^2$, (c) $(q_1q_2)^* = q_2^*q_1^*$, (d) $|qp| = |p| \cdot |q|$. (e) Покажите, что всякий ненулевой кватернион обратим.

Будем отождествлять линейные операторы и их матрицы в фиксированном базисе. Трехмерное пространство чисто мнимых кватернионов отождествим с $\mathbb{R}^3$, зафиксировав базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. $SU(2) = \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1, \ A^*A = AA^* = E\}$. Здесь $A^* = \overline{A^t}$.
$O(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\}$, $SO(3) = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid \det A = 1, \ A^t = A^{-1}\}$.

Задача 5. $SU(2)$ совпадает с группой кватернионов единичной нормы.

Задача 6. Рассмотрим отображение $\Psi\colon g \mapsto \Psi_g$, сопоставляющее кватерниону g единичной нормы оператор $\Psi_g\colon \mathbb{H} \to \mathbb{H}, p \mapsto gpg^{-1}$.

(a) Докажите, что любой такой Ψ_g переводит трехмерное подпространство чисто мнимых кватернионов в себя и сохраняет норму. Иначе говоря, ограничение $\hat{\Psi}_g$ оператора $\Psi(g)$ на подпространство чисто мнимых кватернионов — ортогональный оператор. Иначе говоря, $\hat{\Psi}_g \in O(3)$.

(b) Для каких g оператор $\hat{\Psi}_g$ тождественный?

Задача 7. (a) Докажите, что любые две точки на трехмерной сфере S^3 можно соединить путем, целиком лежащим на сфере.

(b) Докажите, что $\hat{\Psi}_g \in SO(3)$ для любого $g \in SU(2)$.

Задача 8. (a) Найдите $\hat{\Psi}_g$ для $g = \cos(\theta/2)\cdot\mathbf{1} + \sin(\theta/2)\cdot\boldsymbol{i}$ и $g = \cos(\varphi/2)\cdot\mathbf{1} + \sin(\varphi/2)\cdot\boldsymbol{k}$ (это будут повороты относительно каких-то осей на какие-то углы — их и надо найти).

(b) Докажите, что построенное отображение $\hat{\Psi}\colon SU(2) \to SO(3)$ сюръективно.

Итог: мы построили сюръективный гомоморфизм $\hat{\Psi}\colon SU(2) \to SO(3)$ с ядром $\{\pm E\}$.