Список понятий, которыми должны владеть к началу занятий слушатели майнора «Прикладная математика. Искусство и ремесло вычислений» и задачи для самопроверки

Господа студенты,

Прежде, чем принять решение о выборе майнора, предлагаю тщательно оценить свои силы и свои намерения. По опыту прошлого года: все слушатели говорили, что «интересно», причем некоторые добавляли, «но слишком тяжело». Поскольку предполагаются не только рассказы о разных моделях, но и обучение различным практическим приемам вычислений, нужно будет выполнять домашние задания. А это требует времени. Если студент приходит на наш майнор со слабой подготовкой, - действительно, тяжело. Если же без большого труда отвечает на вопросы и решает задачи, которые написаны ниже, - нам по пути. Тут написаны и некоторые вопросы по темам, которые обычно изучают лишь в конце 1 курса. Сделайте на это поправку. Еще есть время до 1 сентября доучить оставшееся.

Если остались важные вопросы, напишите мне на мэйл.

Проф. В.А.Гордин

1. Бином Ньютона.
   Вычислить сумму $\sum_{k=0}^{n}(-2)^k C_n^k$
2. Правило Лопиталя.
   Вычислить предел $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\ shx}{1-\cos x}$.
3. Дифференцирование и интегрирование элементарных функций.
   Вычислить производную $\sin\left[\sqrt{ch(x)}\right]$
4. Ряды Тейлора
   Определить радиус сходимости ряда Тейлора с центром при x=0 для функции $\frac{x}{1+x^2}$
5. Теорема о производной неявной функции. Величина $y(x)$ задана соотношением $ch\left(x^2+2y^2\right)=5$. В каких точках производная $d_x y$ не существует? Чему она равна в остальных точках?
6. Метод множителей Лагранжа поиска условного экстремума. Определите максимум и минимум функции $x+y$ при условии $ch\left(x^2+2y^2\right)=5$.
7. Определение линейного пространства и его размерности. Приведите пример пространства бесконечной размерности.
   Являются линейно зависимыми или линейно независимыми векторы

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ i \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 2i \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8. Основная теорема линейной алгебры.
   Линейный оператор А в Ў^2 переводит векторы a = (1,2) и b= (-1,0)
   $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $и$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ в векторы $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $и$ $\vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, соответственно. Построить матрицу этого оператора в базисе, состоящем из векторов $\vec{a}$ $и$ $\vec{p}$.
9. Линейные и квадратичные формы.

Привести к каноническому виду квадратичную форму $x_1x_2 - 3x_3x_2$.

10. Положительная определенность и скалярное произведение. Какая симметричная билинейная форма соответствует квадратичной форме $x_1x_2 - 3x_3x_2$?
11. Ортогонализация базиса.
    Ортогонализуйте векторы из п.7.
    Докажите, что ядро произвольного линейного оператора есть ортогональное дополнение к образу сопряженного оператора.
12. Матрицы и определители.
    Пусть А квадратная матрица порядка 2. Сколько решений имеется у уравнения $X^2 = A$ (в зависимости от вида А).
    Вычислить определитель матрицы
    $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}.$$
13. Методы Крамера и Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.

Сколько умножений и делений нужно выполнить для решения системы 10-го порядка каждым из методов?

14. Линейные операторы
    Является ли а) унитарным, б) самосопряженным, в) косо-самосопряженным оператор с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$?
    Докажите, что ядро произвольного линейного оператора есть ортогональное дополнение к образу сопряженного оператора.

15. Собственные числа и векторы.

Определите собственные числа и векторы оператора из п.13.